

Л. А. СОМОВА, А. Н. ЧУДОВСКИЙ

УПРАЖНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

(ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ)

О д о б р е н о
Ученым советом Государственного комитета
Совета Министров СССР
по профессионально-техническому образованию
в качестве учебного пособия для средних
профессионально-технических училищ



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1974

Отзывы и замечания просим присылать по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, изд-во «Высшая школа».

Сомова Л. А. и Чудовский А. Н.

С 61 Упражнения по геометрии (дидактический материал). Учебное пособие для средн. проф.-техн. учеб. заведений. М., «Высш. школа», 1974.

165 с. с ил.

Пособие содержит карточки-задания, в которых приводятся контрольные, самостоятельные и тренировочные работы по геометрии. Тренировочные работы готовят учащихся к самостоятельным работам. Кроме того, даются упражнения для подготовки к экзаменам по геометрии и специальные задания повышенной трудности.

Книга предназначена для учащихся средних профтехучилищ.

С $\frac{20202-215}{052(01)-74}$ 5—74

513

ВВЕДЕНИЕ

Пособие содержит 32 самостоятельные работы, 16 контрольных работ, 32 тренировочные работы для устного опроса и фронтальной работы в классе, задачи устные и полуустные для отработки навыка, задачи повышенной сложности по каждому разделу программы, задачи к экзаменационным билетам, методические советы по прохождению отдельных вопросов программы.

Работа с пособием предполагает предварительное изготовление карточек, поэтому потребуется приобрести несколько экземпляров пособия, чтобы карточек хватило на всех учащихся.

Тренировочные работы готовят учащиеся к выполнению самостоятельных и контрольных заданий и могут служить материалом для фронтальной работы с классом, для индивидуальной работы с учащимися, для устного опроса.

Самостоятельные работы даются на 15—20 мин, поэтому на уроке следует оставлять время, чтобы после того, как учащиеся сдадут работу, сразу разобрать ее. Достаточно разобрать первый и второй варианты, так как остальные, как правило, аналогичны. Разбор должен быть кратким, его проводит сам преподаватель, отмечая лишь особо существенные моменты в работе. За самостоятельную работу можно оценок не ставить, так как главная цель такой работы установить, что слабо усвоено учащимися, на что преподаватель должен обратить внимание.

Некоторые работы содержат задачи более трудные, отмеченные штрихом, например 2') или а'). Если в контрольной работе будет сделано все, кроме задач, отмеченных штрихом, то выставляется оценка «3». Задачи, помеченные «н.о.», решать не обязательно. Если учащийся не решил задачи с

пометкой «н.о.» или допустил ошибку в решении, оценка за основную работу не снижается. Однако, если основная работа решена на «4» или «5», то за решение задачи, отмеченной «н.о.», выставляется дополнительная оценка, но в журнал ее вносят по желанию учащегося.

Задачи повышенной сложности, приведенные в конце каждого раздела тренировочных работ, можно давать в каждом домашнем задании и в классе, но в качестве необязательных.

В пособии приняты следующие обозначения: Т-2-1 (Т — вид работы, 2 — номер работы, 1 — вариант работы), С-3-2 (самостоятельная работа 3, вариант 2), К-5-3 (контрольная работа 5, вариант 3) и т. д.

Приведенная ниже тематика тренировочных и самостоятельных работ поможет преподавателю определить, при прохождении каких тем использовать ту или иную тренировочную и самостоятельную работу и после каких тем проводить контрольные работы.

№ работ	Темы тренировочных работ
Т-1 •	Числовые последовательности, способы их задания Конечные и бесконечные последовательности. (См. примечание 1.)
С-1 Т-2	Монотонные последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Предел бесконечной числовой последовательности
С-2 Т-3	Основные теоремы о пределах
С-3 К-1 Т-4	Длина окружности и площадь круга. (См. примечание 2.)
С-4 К-2 Т-5	Теорема синусов. Решение треугольников по стороне и двум углам. (См. примечание 3.)
С-5 Т-6	Теорема косинусов. Формула Герона. Решение треугольников по двум сторонам и углу и по трем сторонам

№ работ	Темы тренировочных работ
С-6 Т-7	Решение задач, связанных с решением косоугольных треугольников
С-7 К-3 Т-8	Аксиомы стереометрии и их следствия. Построение сечений по трем точкам (обоснования устно). (См. примечания 4, 8.)
С-8 Т-9	Прямая и плоскость, параллельные между собой
С-9 К-4 Т-10	Параллельные плоскости. Угол скрещивающихся прямых
С-10 К-5 Т-11	Основные свойства параллельных проекций и применение их к построению пространственных фигур
С-11 Т-12	Решение задач
С-12 К-6 Т-13	Определение перпендикуляра к плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонные к плоскости. Угол прямой с плоскостью. Теорема о трех перпендикулярах
С-13 Т-14	Зависимость между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей
С-14 К-7 Т-15	Двугранные углы. Линейные углы
С-15 Т-16	Перпендикулярные плоскости. Многогранные углы
С-16 К-8 Т-17	Параллелепипеды. Свойства граней и диагоналей параллелепипеда. Теорема о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда
С-17 Т-18	Пирамида. Усеченная пирамида. Свойства параллельных сечений в пирамиде

№ работ	Темы тренировочных работ
С-18 К-9 Т-19	Боковая и полная поверхность призмы
С-19 Т-20	Боковая и полная поверхность пирамиды
С-20 К-10 Т-21	Объем призмы. (См. примечание 5.)
С-21 Т-22	Объем пирамиды
С-22 К-11 Т-23	Правильные многогранники
С-23 Т-24	Цилиндр, конус, усеченный конус
С-24 Т-25	Боковая и полная поверхность цилиндра. (См примечание 6.)
С-25 К-12 Т-26	Боковая и полная поверхность конуса. Развертка конуса. Объем конуса
С-26 К-13 Т-27	Сфера и шар. Взаимное положение плоскости и сферы. Плоскость, касательная к шару
С-27 Т-28	Поверхность шара и его частей. Объем шара и его частей. (См. примечание 5.)
С-28 К-14 Т-29	Решение задач на комбинацию шара с многогранниками
С-29 Т-30	Повторение: решение треугольников; площади параллелограмма, треугольника, трапеции, ромба
С-30 К-15 Т-31	Прямые и плоскости в пространстве. Длина окружности и площадь круга
С-31 Т-32 С-32 К-16	Комбинации конуса и пирамиды

ПРИМЕЧАНИЯ

Примечание 1

а) В порядке повторения курса восьмилетней школы при прохождении темы «Числовая последовательность» решаются задачи на вычисление длины окружности и площади круга, на вписанные и описанные многоугольники.

б) Если длина окружности и площадь круга будут даны учителем не по учебнику Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой («Алгебра и элементарные функции». Ч. I. М., «Просвещение», 1966), а так, как это излагается в примечании 2, то в § 128 и 129 учебника следует полностью исключить те примеры, которые связаны с вписанными и описанными многоугольниками. Вместо этого в § 128 как один из примеров монотонно убывающей последовательности можно рассмотреть следующий (рис. 1):

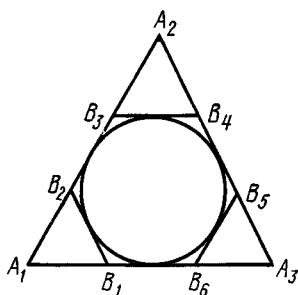


Рис. 1.

Рассмотрим площади правильных описанных многоугольников:

S_1 — площадь правильного описанного треугольника $A_1A_2A_3$;

S_2 — площадь правильного описанного шестиугольника $B_1B_2\dots B_6$;

S_3 — площадь правильного описанного двенадцатиугольника;

.....

S_n — площадь правильного описанного многоугольника.

Так как площадь каждого последующего многоугольника составляет часть площади предыдущего, то $S_1 > S_2 > S_3 > \dots > S_n$, следовательно, площади описанных правильных многоугольников составляют убывающую последовательность.

В § 129 рекомендуется рассмотреть такой пример (рис. 2):

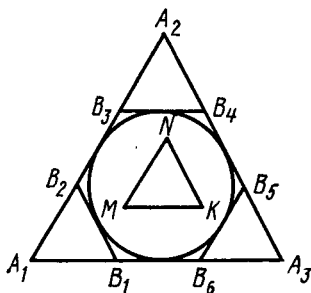


Рис. 2.

Как мы установили, $S_1 > S_2 > S_3 > \dots > S_n$, т. е. площади описанных многоугольников составляют убывающую последовательность, общий член которой мы обозначим S_n . Но $S_n > S_{MNK}$, так как S_{MNK} составляет часть площади S_n , таким образом, последовательность $\{S_n\}$ является ограниченной снизу.

Примечание 2

а) **Определение площади круга.** В примечании 1, б мы установили, что последовательность площадей описанных многоугольников $\{S_n\}$ монотонная и ограниченная, следовательно, имеет предел, который мы и примем за площадь круга.

О п р е д е л е н и е. За площадь круга принимаем предел, к которому стремится площадь описанного около этого круга правильного многоугольника, когда число сторон его неограниченно удваивается.

б) **Определение длины окружности.** Известно, что $S_n = r \frac{P_n}{2}$, т. е. площадь (S_n) описанного многоугольника равна произведению радиуса (r) вписанной окружности на полупериметр $\left(\frac{P_n}{2}\right)$, откуда $P_n = \frac{2}{r} S_n$. Но S_n при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, $\frac{2}{r}$ — величина постоянная, следова-

тельно, $\frac{2}{r} S_n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, а значит, и P_n при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, который мы и примем за длину окружности (C).

О п р е д е л е н и е. За длину окружности (C) принимаем предел, к которому стремится периметр описанного около этого круга правильного многоугольника, когда число сторон его неограниченно удваивается.

В ы в о д ф о р м у л ы д л и н ы о к р у ж н о с т и. Вывод формулы длины окружности такой, как в § 139 учебника Кочетковых, за исключением того, что будут рассматриваться не вписанные в окружности правильные n -угольники, а описанные около окружностей. Следовательно, несколько изменится и рис. 213 учебника, который будет выглядеть так (рис. 3):

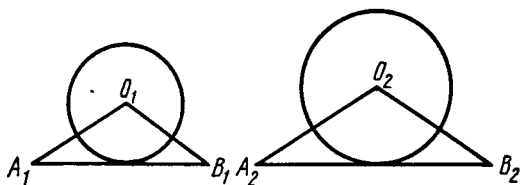


Рис. 3

В ы в о д ф о р м у л ы п л о щ а д и к р у г а. Вывод формулы иной, чем в § 141 учебника Кочетковых.

Так как

$$S_{\text{круга}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad \text{а} \quad S_n = \frac{r}{2} P_n,$$

$$\text{то } S_{\text{круга}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{2} P_n \right) = \frac{r}{2} C = \frac{r}{2} 2\pi r = \pi r^2.$$

Примечание 3

Как при решении треугольников, так и при решении задач с практическим содержанием, связанных с измерениями, необходимо пользоваться логарифмической линейкой и применять правила приближенных вычислений.

Примечание 4

Учащимся 8-го класса знаком довольно большой материал по стереометрии (см. объяснительную записку к программе по математике для восьмилетней школы). В частности, они знают, что такое перпендикуляр к плоскости [См. Н. Н. Никитин. «Геометрия», учебник для 6—8 классов. М., «Просвещение», 1967, § 63 (4)], угол прямой с плоскостью (§ 100 того же учебника, но здесь следует добавить, что AC' называется проекцией AC на плоскость P), и знают, что два перпендикуляра к плоскости параллельны [на этих фактах основывается ряд измерений на местности — см., например, § 7, § 89(3) и др.]. Эти сведения дают возможность сразу же, приступив к изложению темы «Основные понятия стереометрии», решать большинство задач из § 1 (см. Н. Рыбкин. «Сборник задач по геометрии». Ч. II. М., «Просвещение», 1970), кроме задач 8, 10, 11, 21—23, 25—28; все задачи из § 2 и далее, по мере прохождения материалов темы «Параллельные прямые и плоскости», решать большинство задач из § 3, кроме задач 10, 22, 23, а в задачах 25 и 26 пока не находить площадь сечений.

Примечание 5

Данное в учебнике Киселева определение призмы таково, что тело, изображенное на рис. 4, будет удовлетворять определению, хотя призмой и не является.

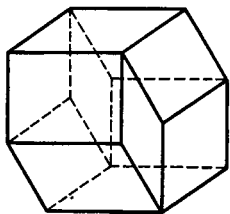


Рис. 4

В книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова, Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М., «Наука», 1970) сказано, что можно дать определение призмы, используя понятие цилиндрической поверхности: «Призмой называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью, направляющей которой является выпуклый многоугольник, и двумя параллельными между

собой секущими плоскостями, не параллельными образующей». Определение пирамиды тоже можно дать иначе, чем в учебнике, используя понятие конической поверхности [см. А. П. Киселев, «Геометрия», Ч. II. М., «Просвещение», 1966, § 108].

Примечание 6

Рекомендуем вывести объемы тел при помощи принципа Кавальери или формулы Симпсона. В объяснительной записке к программе по математике для средней школы сказано следующее:

«Вывод формул объема других тел может быть осуществлен, например, при помощи принципа Кавальери или формулы Симпсона, позволяющих находить объемы весьма широкого класса тел. По усмотрению учителя формула Симпсона (как и принцип Кавальери) может сообщаться без обоснования».

Примечание 7

Ход рассуждений при выводах формул площадей боковых поверхностей тел вращения и объемов этих тел один и тот же. Покажем этот ход рассуждений на примере вывода формулы объема усеченного конуса.

а) Допустим, что усеченный конус описан правильной усеченной пирамидой (чертеж не обязателен).

б) Объем (V_n) этой усеченной пирамиды, как известно, равен

$$V_n = \frac{H}{3} (Q_n + q_n + \sqrt{Q_n q_n}).$$

в) Но Q_n и q_n — площади правильных описанных n -угольников при $n \rightarrow \infty$, как было установлено раньше, имеют пределы, поэтому $\frac{H}{3} (Q_n + q_n + \sqrt{Q_n q_n})$, т. е. V_n при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, который мы и принимаем за объем усеченного конуса.

г) **О п р е д е л е н и е.** За объем усеченного конуса принимаем предел, к которому стремится объем описанной около усеченного конуса правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней ее неограниченно удваивается.

д) **В ы в о д** формулы объема усеченного конуса. По определению $V_{\text{ус. конуса}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$, следовательно,

$$\begin{aligned} V_{\text{ус. конуса}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{H}{3} (Q_n + q_n + \sqrt{Q_n q_n}) \right] = \\ &= \frac{H}{3} (\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \sqrt{\pi R_1^2 \cdot \pi R_2^2}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi H}{3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1 \cdot R_2).$$

Аналогично выводятся формулы боковой поверхности и объема цилиндра и конуса.

Примечание 8

При решении тренировочных, самостоятельных и контрольных работ, связанных с построением сечений в многогранниках, желательно, чтобы учащиеся приходили на урок с заготовленными чертежами этих многогранников. Для

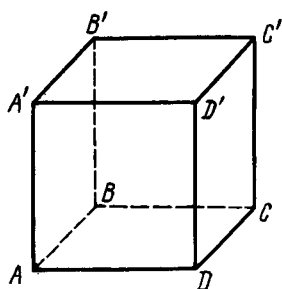


Рис. 5. $AD = AA' = 4$ см;
 $CD = 0,5AD$;
 $\angle ADC = 135^\circ$

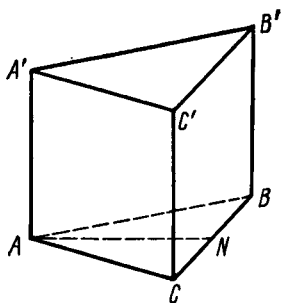


Рис. 6. $AN = 4,5$ см;
 $AA' = 4$ см; $BC = 3$ см;
 $\angle ANB = 135^\circ$

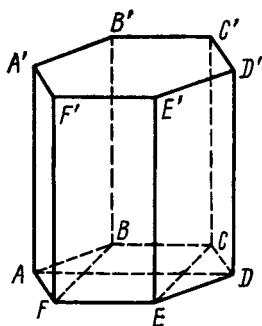


Рис. 7. $AA' = AD = 4$ см;
 $FE = 2$ см;
 $\angle AKB = 135^\circ$;
 $BK = KF \approx 0,8$ см

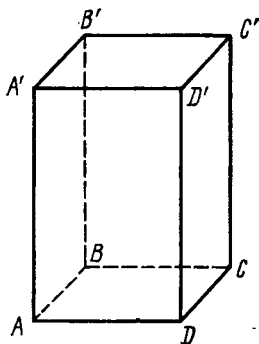


Рис. 8. $AD = 3$ см;
 $DD' = 4,5$ см; $DC =$
 $= 1/2 AD$

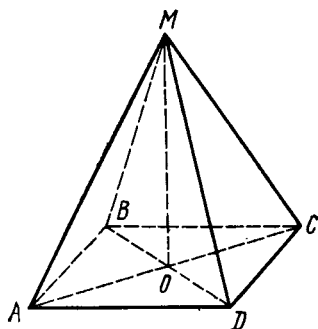


Рис. 9. $AD = 4$ см;
 $MO = 4,5$ см; $\angle ADC = 135^\circ$;
 $CD = \frac{1}{2}AD$

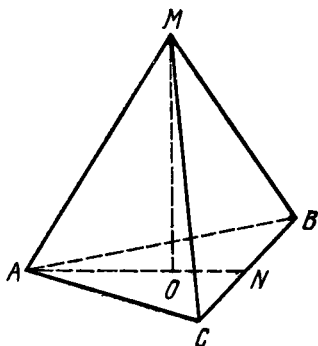


Рис. 10. $AN = MO = 4,5$ см;
 $BC = 3$ см;
 $\angle ANB = 135^\circ$

этого необходимо дать «стандартные» изображения этих многогранников: куба, правильных треугольных, четырехугольных и шестиугольных пирамид и призм. Целесообразно изготовить по одному набору соответствующих штампов для каждого учителя. Размеры этих изображений не должны быть мелкими. На рис. 5—11 приведены фигуры с соответствующими размерами.

При построении сечений необходимо выделить на каждую фигуру целую страницу и располагать фигуру в середине страницы. Построение сечений следует обосновывать устно.

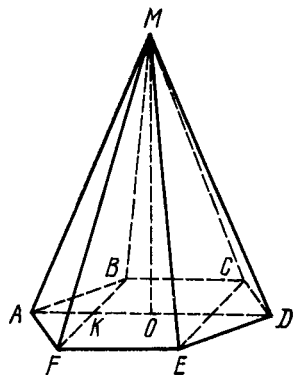


Рис. 11. $AD = 4$ см; $FE = 2$ см;
 $MO = 4,5$ см; $\angle AKB = 135^\circ$;
 $BK = KF \approx 0,8$ см

Примечание 9

Следует предупредить учащихся, что если в стереометрической задаче требуется найти угол по некоторым числовым данным, то в этом случае можно ограничиваться нахождением значения какой-нибудь тригонометрической функции этого угла.

НЕСЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОТРАБОТКИ НАВЫКА

Эти задачи в большинстве случаев решаются устно; если задачи решаются письменно, то на решение одной задачи требуется примерно 1—3 мин. Одну и ту же задачу следует задавать неоднократно: на другой день, через неделю, в следующей четверти, на следующий год, добиваясь почти автоматического ее решения.

Под каждым номером дается несколько задач. Так, под номером 2 дано 5 задач, из которых каждому ученику следует предложить по задаче; под номером 7, а даны 10 задач: 5 на длину окружности и 5 на площадь круга; под номером 7, д — 16 задач. Обозначения Т-1, Т-2 и т. д. указывают, начиная с какой тренировочной работы можно предлагать данные задачи.

Т-1.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из 6 членов (или из 5 членов, или из 7 членов). Записать ее 3-й член (или 2-й, или 4-й).

2. Назвать первые три (или второй и третий) члены последовательности

$$\{-3n\} \left(\text{или } \{2n-3\}, \text{ или } \left\{ \frac{n-1}{3} \right\}, \text{ или } \{n^2-1\}, \text{ или } \{(n-1)^2\} \right).$$

Т-2.

3. Привести пример убывающей (или возрастающей) последовательности.

4. По формуле общего члена записана последовательность

$$5, 7, 9, 11, \dots \left(\text{или } \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{12}, \frac{4}{24}, \dots; \right. \\ \left. \text{или } -2, 3, -4, 5, -6, \dots \right).$$

Назвать следующие два члена последовательности и определить, будет последовательность возрастающей или убывающей.

Т-3.

5. Вычислить устно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} \left[\text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2-n+1}{n^2}, \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-5}{n^3}, \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n-4}{n+8} \right), \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5}{3n^2-4n}, \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-4n-1}{7n^2+9n+3} \right].$$

6. Найти длину окружности (или площадь круга), если радиус равен 1 м (или 0,5 м, или a , или $\sqrt{3}$ м, или $a\sqrt{2}$).

7. а) В правильном треугольнике $r^* = 3$ м (или $r = a$, или $r = \sqrt{2}$ м, или $a_3 = 6$ м, или $a_3 = a\sqrt{3}$). Найти длину окружности, описанной около треугольника (или площадь круга, описанного около треугольника).

б) В правильном треугольнике $R^* = 6$ м (или $R = 2a$, или $R = 2\sqrt{3}$ м, или $a_3 = 6$ м, или $a_3 = 2a\sqrt{3}$). Найти площадь круга, вписанного в треугольник (или длину окружности, вписанной в треугольник).

в) В квадрате диагональ равна 4 м (или $2\sqrt{2}$ м, или a , или $a\sqrt{2}$). Найти площадь круга, вписанного в квадрат.

г) В квадрате сторона равна 4 м (или a , или $a\sqrt{2}$, или $2\sqrt{2}$ м). Найти площадь круга, описанного около квадрата.

д) В правильном шестиугольнике сторона равна 2 м (или $2a$, или $2\sqrt{3}$ м, или $2a\sqrt{3}$). Найти длину окружности, описанной около шестиугольника (или найти длину окружности, вписанной в шестиугольник). Найти площадь круга, описанного около шестиугольника (или площадь круга, вписанного в шестиугольник).

е) Высота в ромбе равна 4 м. Найти длину окружности, вписанной в ромб, и площадь круга, вписанного в ромб.

ж) В ромбе сторона равна 4 м, а угол 30° . Найти площадь вписанного в ромб круга.

з) В ромбе сторона равна $2a$, а угол равен α . Найти длину окружности, вписанной в ромб.

и) В прямоугольном треугольнике катет равен 4 м (или $2a$), а прилежащий (или противолежащий) угол 30° (или 60° , или 45° , или α). Найти площадь описанного около треугольника круга.

8. Длина окружности равна 4π м (или πa , или 2 м, или a). Найти радиус окружности.

9. Площадь круга равна $4\pi\text{м}^2$ (или πa^2 , или 2м^2 , или a). Найти радиус круга.

10. См. рис. 12. Найти радиус круга и высоты сегментов, если $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{9}$.

11. См. рис. 15. $BD = a$ (или 2 м, или $a\sqrt{2}$). $\angle ABD = \alpha$ (или 30° , или 45° , или 60°). Найти R и DE .

* r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности.

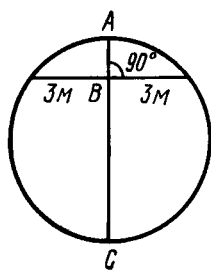


Рис. 12.

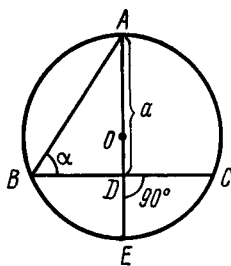


Рис. 13.

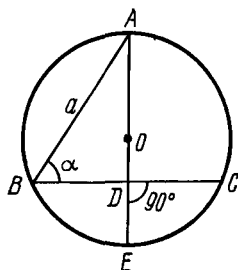


Рис. 14.

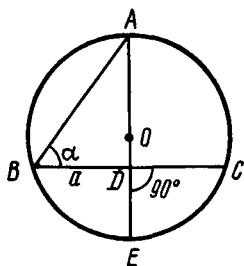


Рис. 15.

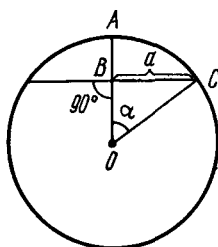


Рис. 16.

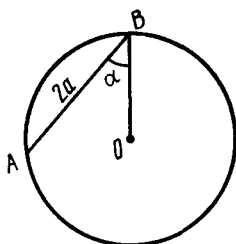


Рис. 17.

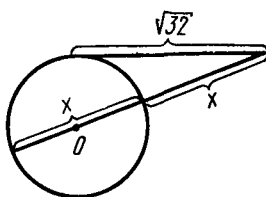


Рис. 18.

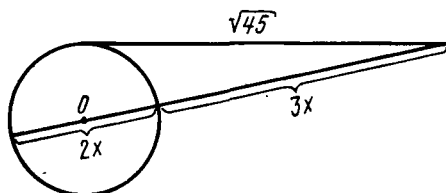


Рис. 19.

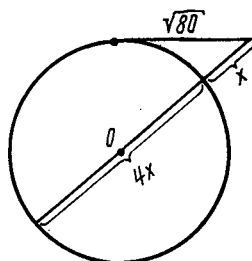


Рис. 20.

12. См. рис. 13. $AD = a$ (или 2 м, или $a\sqrt{3}$), $\angle ABD = \alpha$ (или 30° , или 45° , или 60°). Найти R и DE .

13. См. рис. 14. $AB = a$ (или 2 м, или $a\sqrt{2}$), $\angle ABC = \alpha$ (или 30° , или 45° , или 60°). Найти R и DE .

14. См. рис. 16. $BC = a$ (или 2 м, или $a\sqrt{3}$), $\angle BOC = \alpha$ (или 30° , или 45° , или 60°). Найти R и AB .

15. См. рис. 17. $AB = 2a$ (или 2 м, или $a\sqrt{2}$), $\angle ABO = \alpha$ (или 30° , или 45° , или 60°). Найти R и расстояние от точки O до AB .

16. См. рис. 18. Найти длину окружности и площадь круга.

17. См. рис. 19. Найти длину окружности и площадь круга.

18. См. рис. 20. Найти длину окружности и площадь круга.
Т-5.

19. Найти площадь треугольника (или параллелограмма), если $a = 2$ м, $b = 3$ м, угол между этими сторонами 60° (или 45° , или 30° , или α).

20. Найти площадь параллелограмма, если $d_1 = 4$ м, $d_2 = 5$ м (d_1 и d_2 — диагонали) и угол между диагоналями 30° (или 45° , или 60° , или α).

Т-6.

21. Найти площадь треугольника, R — радиус окружности, описанной около треугольника, и r — радиус вписанной в треугольник окружности, если стороны треугольника равны 3 м, 4 м, 5 м (или 5 м, 12 м, 13 м; или 7 м, 24 м, 25 м; или 9 м, 40 м, 41 м).

22. Найти диагонали параллелограмма, если стороны равны 3 м и 8 м (или 5 м и 8 м; или 7 м и 15 м; или 8 м и 15 м), а угол между этими сторонами равен 60° .

23. Найти диагонали параллелограмма, если стороны равны 3 м и 5 м (или 5 м и 16 м), а угол между этими сторонами 120° .

Т-8.

24. Найти точку пересечения прямой, расположенной на боковой грани пирамиды (или параллелепипеда), с плоскостью основания пирамиды (или параллелепипеда)*.

* Учитель от руки вычерчивает на доске произвольную пирамиду (или параллелепипед) и, проведя на плоскости боковой грани произвольную прямую, не параллельную ребру основания, предлагает учащимся решить задачу. Учащиеся в тетради приблизительно копируют чертеж с доски. Специальных плакатов в этом случае делать не нужно. И вообще, для решения задач, содержание которых можно быстро изобразить на доске, плакаты не требуются.

Т-9.

25. Из одной точки к плоскости провести две различные наклонные: одна имеет проекцию 2 м, вторая — 3 м (или одна a , вторая $2a$). Какая из наклонных образует с плоскостью меньший угол?

26. Из одной точки к плоскости проведены две наклонные: одна равна 2 м, другая — 3 м (или одна a , другая $3a$). Какая из наклонных образует с плоскостью больший угол?

27. Из точки к плоскости проведена наклонная, равная 2 м (или a , или $\sqrt{2}$ м, или $a\sqrt{3}$), которая образует с плоскостью угол 45° (или 30° , или 60° , или α). Найти расстояние от точки до плоскости.

28. Из точки к плоскости проведена наклонная под углом 30° (или 45° , или 60° , или α). Найти длину наклонной, если расстояние от точки до плоскости (или проекция наклонной на плоскость) равно (равна) 2 м (или a , или $a\sqrt{3}$, или $\sqrt{2}$ м).

Т-10.

29. Провести сечение с помощью линейки и угольника в параллелепипеде через две параллельные грани, если на одной грани будет дана прямая, а на другой грани — произвольная точка (не обязательно на ребре). (См. сноску к задаче 24.) Приводим один из возможных случаев (рис. 21). L — принадлежит плоскости $AA'B$.

Т-11.

30. См. рис. 22. Найти расстояние от середины отрезка AB до CD .

31. См. рис. 23. Найти расстояние от точки M до CD , если $BM : AM = 1 : 2$ (или $1 : 3$, или $1 : 4$).

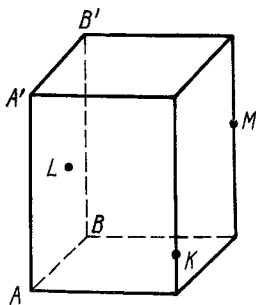


Рис. 21.

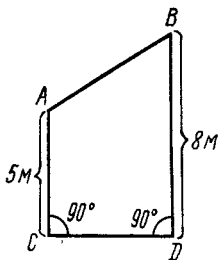


Рис. 22.

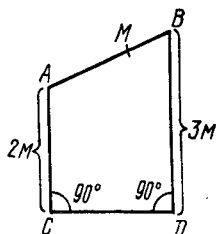


Рис. 23.

Т-13.

32. Начертить от руки приблизительно такую пирамиду: (рис. 24, или 25, или 26, или 27), где MB — высота пирамиды, и указать, а где потребуется, построить от руки, отрезки, равные расстояниям от точки M до каждой из сторон основания пирамиды.

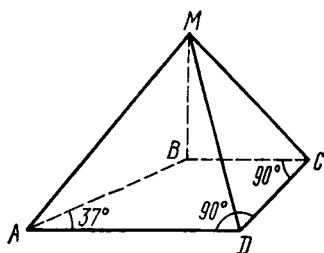


Рис. 24.

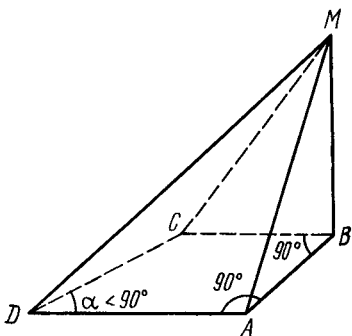


Рис. 25.

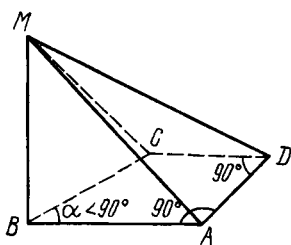


Рис. 26.

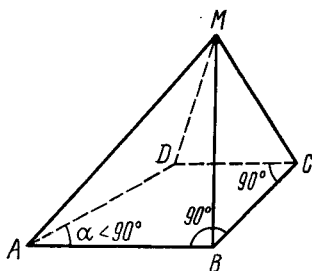


Рис. 27.

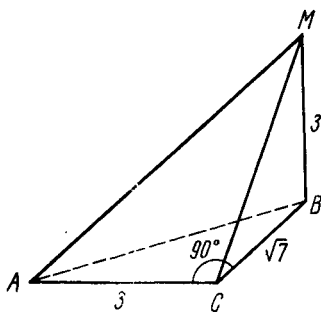


Рис. 28.

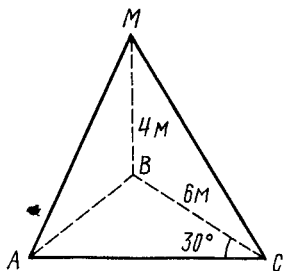


Рис. 29.

33. См. рис. 28. Найти расстояние от M до AC (или площадь треугольника AMC), если MB — высота пирамиды.

34. См. рис. 29. MB — высота пирамиды, $C = 30^\circ$ (или 45° , или 60° , или α). Найти расстояние от точки M до AC .

T-15.

35. Использовать рисунки к задачам 32—34 и указать на них (или построить) линейные углы двугранных углов, меньших 90° , образуемых боковыми гранями с основанием.

36. Взять модель какой-либо пирамиды или наклонной призмы и найти двугранные углы при ребре основания и боковом ребре, произведя необходимые измерения*.

T-17.

37. Ребро куба равно 1 м (или a). Чему равна диагональ куба? Чему равна какая-нибудь тригонометрическая функция угла наклона диагонали куба к его грани?

38. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$ м (или $\sqrt{27}$ м, или $\sqrt{3}$ м). Найти ребро куба.

39. В основании прямой призмы $ABCA' B'C'$ — прямоугольный треугольник ABC , в котором угол $C = 90^\circ$. Построить от руки угол между AC' и гранью $AA'B'B$.

40. Построить прямую призму $ABCD A' B' C' D'$, в основании которой ромб, и построить угол между $B'D$ и гранью $CC'D'D$ (или гранью $AA'D'D$), где угол $A'B'C'$ — тупой. Все построения производить от руки.

T-18.

41. В пирамиде сечение делит высоту в отношении 1 : 2 (или 1 : 3, или 1 : 4, или 1 : 5), считая от вершины пирамиды. Найти площадь основания, если площадь сечения равна 2 м^2 , или найти площадь сечения, если площадь основания равна 60 м^2 .

42. На модели пирамиды отметить на боковом ребре точку, через которую следует провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была в 4 раза (или в 9 раз, или в 16 раз, или в 25 раз) меньше площади основания.

T-19.

43. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 2 м, а стороны перпендикулярного сечения равны 3 м, 4 м, 5 м (или 5 м, 12 м, 13 м; или 7 м, 24 м, 25 м; или 9 м, 40 м, 41 м). Найти боковую поверхность призмы.

44. Взять модель наклонной призмы и найти ее полную поверхность.

* Желательно такие работы выполнять чаще.

Т-20.

45. В пирамиде площадь основания равна 2 м^2 (или 4 м^2 , или $\sqrt{3} \text{ м}^2$, или $\sqrt{2} \text{ м}^2$, или a). Боковые грани наклонены к основанию под углом 30° (или 45° , или 60° , или α). Найти боковую поверхность пирамиды.

46. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α . В основании пирамиды — ромб с высотой 4 м и стороной 6 м (или правильный треугольник с высотой 6 м, или квадрат со стороной 2 м). Найти боковую поверхность пирамиды.

47. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти высоту пирамиды, если в основании пирамиды равнобедренный треугольник с гипотенузой, равной 2 м (или правильный треугольник с высотой, равной 6 м; или правильный треугольник со стороной, равной $3\sqrt{3}$ м; или квадрат со стороной $\sqrt{2}$ м; или правильный шестиугольник со стороной 2 м; или равнобедренный треугольник со стороной, равной 3 м, и противолежащим углом, равным 30°).

48. Взять модель пирамиды и найти ее полную поверхность.

Т-21.

49. По данным задачи 43 найти объем треугольной призмы.

50. Взять модель призмы и найти ее объем.

Т-22.

51. По данным задачи 46 найти объем пирамиды.

52. По данным задачи 47 найти объем пирамиды.

53. Взять модель пирамиды и найти ее объем.

Т-23.

54. Ребро правильного тетраэдра (или октаэдра) равно 3 м (или 2 м, или $\sqrt{3}$ м). Найти полную поверхность.

Т-24.

55. Образующая конуса равна 2 м (или a , или $\sqrt{3}$ м, или $a\sqrt{2}$). Найти площадь сечения конуса, проведенного через две образующие, составляющие между собой угол 30° (или 45° , или 60° , или α).

56. Образующая конуса равна 6 м и наклонена к основанию под углом 60° (или 30° , или 45° , или α). Найти площадь осевого сечения конуса и высоту конуса.

Т-26.

57. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α , вписана правильная треугольная пирамида (или правильная четырехугольная, или правильная шес-

тиугольная). Ребро основания пирамиды равно 3 м (или 3 a). Найти боковую поверхность (или объем) конуса.

58. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α , вписана треугольная пирамида, в основании которой прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 м (или a). Найти боковую поверхность (или объем) конуса.

59. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α , вписана треугольная пирамида, в основании которой треугольник со стороной, равной a (или 2 м), и противолежащим углом α (или 30° , или 45° , или 60°). Найти боковую поверхность (или объем) конуса.

60*. В конус вписать цилиндр.

61. В конус вписать прямую треугольную (или четырехугольную) призму.

62. В треугольную (или четырехугольную) пирамиду вписать цилиндр.

T-27.

Повторить задачи 10, 14—18.

T-28.

Повторить задачи 11—13.

63. См. рис. 30. $AO = a$, $\angle AOB = 60^\circ$ (или 90° , или 120° , или 2α). Найти высоту шарового сектора и сегментную поверхность.

64. См. рис. 31. Круговой сектор OAB вращается вокруг MN . Найти поверхность шарового пояса.

65. См. рис. 32. Круговой сектор OAB вращается вокруг MN . Найти поверхность шарового пояса.

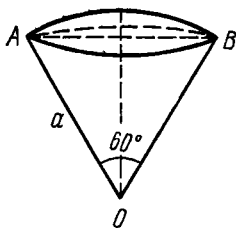


Рис. 30.

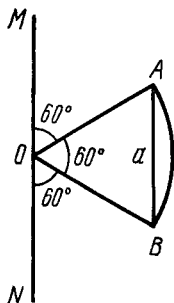


Рис. 31.

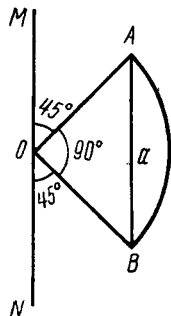


Рис. 32.

* В задачах 60—62 чертежи выполняются от руки.

66. См. рис. 33. Круговой сектор AOB вращается вокруг MN . Найти поверхность шарового пояса.

67. В шар вписать конус. Образующая конуса равна a и наклонена к основанию под углом α . Найти поверхность шара.

68. В шар вписать цилиндр. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 4 м (или 2 a). Найти объем шара.

69. В шар вписать правильную треугольную (или правильную четырехугольную) пирамиду, боковые ребра которой наклонены к основанию под углом α . Ребро основания пирамиды равно $3\sqrt{3}$ м (для треугольной) или $2\sqrt{2}$ м (для четырехугольной). Найти объем шара.

70. В шар вписать пирамиду, в основании которой прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 4 м (или 2 a). Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти поверхность шара.

71. Боковые ребра пирамиды, у которой высота равна a , наклонены к основанию под углом α . Пирамида вписана в шар. Найти объем шара.

72. В шар вписать куб. Диагональ куба равна 4 м. Найти объем и поверхность куба и шара.

73. В шар вписать правильную треугольную призму.

74. В шар вписать какую-нибудь прямую призму.

75. В шар вписать усеченный конус.

76. В шар вписать какую-нибудь усеченную пирамиду.

77. Взять модель шара и найти объем вписанной в него правильной пирамиды, если ее основание вписано в большой круг шара и в основании пирамиды правильный треугольник (или правильный четырехугольник, или правильный шестиугольник).

78. Взять модель шара и найти объем вписанного в него куба.

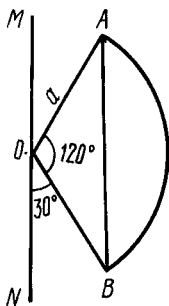


Рис. 33.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ

Тренировочная работа Т-1

Т-1-1.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из пяти членов. Записать ее последний член.

2. Написать три первые члена и 7-й член последовательности $\{2(1 - n)n\}$.

3'. По формуле общего члена записана такая последовательность: $-1, 1, 3, 5, \dots$. Найти 8-й член этой последовательности.

4* (н.о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3'.

Т-1-2.

1. Написать три первые и 6-й член последовательности $\{(2n + 1)(n - 2)\}$.

2. Придумать какую-нибудь формулу общего члена бесконечной последовательности и затем написать ее 2-й и 4-й члены.

3'. По формуле общего члена записана такая последовательность: $0, 3, 8, 15, \dots$. Найти 5-й член этой последовательности.

4 (н.о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3'.

Т-1-3.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из четырех членов. Записать ее 2-й член.

2. Написать пять первых и 9-й член последовательности $\left\{ \frac{n-2}{(-1)^n} \right\}$.

3'. По формуле общего члена записана такая последовательность: $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots$. Найти 6-й член этой последовательности.

4 (н.о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3'.

Т-1-4.

1. а) Написать три первые и пятый члены последовательности $\{2(n - 1)^2\}$.

б') Какие из чисел: 98, -72 , 17, 9 являются членами этой последовательности?

2. Придумать какую-нибудь формулу общего члена бесконечной последовательности и затем написать первые три члена этой последовательности.

Т-1-5.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из четырех членов, и записать ее 3-й член.

2. а) Написать первые четыре и 6-й член последовательности $\left\{ \frac{(n + 1)^2}{n} \right\}$.

* Имеется в виду одна из возможных формул.

б') Какие из чисел: $-\frac{121}{10}$, $\frac{200}{13}$, $\frac{625}{24}$ являются членами этой последовательности?

Т-1-6.

1. а) Написать первые три члена и 5-й член последовательности $\{3(2-n)^3\}$.

б') Какие из чисел: 81, -192, 264 являются членами этой последовательности?

Т-1-7.

1. Написать четыре первые члена и 10-й член последовательности $\{2(-1)^{n-1}\}$.

2. Придумать какую-нибудь формулу общего члена бесконечной последовательности и записать первые три члена этой последовательности.

3'. По формуле общего члена записана такая последовательность: 0, 2, 6, 12, 20, Найти 7-й член этой последовательности.

4 (н.о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3'.

Т-1-8.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из пяти членов. Записать ее 6-й член.

2. Написать первые три и 5-й член последовательности $\left\{\frac{n^2+1}{n+2}\right\}$.

3'. По формуле общего члена записана такая последовательность: $1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \dots$. Найти 6-й член этой последовательности.

4 (н. о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3'.

Задачи повышенной сложности к работе Т-1

1. Написать первые пять членов последовательности натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке: а) 1; б) 2. Написать формулу их общих членов.

2. Написать первые пять членов последовательности чисел, противоположных целым неположительным числам.

3. Написать формулу общих членов последовательностей:

а) $1, 1\frac{1}{3}, 2, 3\frac{1}{5}, \dots$; б) $\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{7}, \dots$.

Т-2-1.

1. Привести пример возрастающей последовательности.
2. Является ли бесконечная последовательность $\{(-1)^n + 2\}$: а) ограниченной снизу; б) ограниченной сверху; в) монотонной? г') Имеет ли она предел?
- 3 (н. о.). Написать формулу общего члена последовательности $-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \dots$.

Т-2-2.

1. Привести пример убывающей последовательности.
2. Является ли бесконечная последовательность $\left\{\frac{3-n}{n}\right\}$: а) ограниченной сверху, б) ограниченной снизу, в) монотонной? г') Имеет ли она предел?
- 3 (н.о.). Написать формулу общего члена последовательности $2, 5, 10, 17, \dots$.

Т-2-3.

1. Привести пример убывающей последовательности.
2. По формуле общего члена записана последовательность $2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, \dots$. Найти ее 6-й член. Имеет ли эта последовательность предел?

3. Является ли бесконечная последовательность $\left\{\frac{1+2n}{1+n}\right\}$: а) ограниченной; б') монотонной?

- 4 (н.о.). Написать формулу общего члена последовательности, данной в задаче 2.

Т-2-4.

1. Привести пример возрастающей последовательности.
2. По формуле общего члена записана последовательность $9, 12, 15, 18, 21, \dots$.

- а) Написать 7-й член этой последовательности.
- б') Какое из чисел: 117, 215 содержится среди членов этой последовательности? Найти номер этого члена.

Т-2-5.

1. Будет ли последовательность $\left\{\frac{2n}{2n+1}\right\}$ ограниченной?
2. Придумать формулу общего члена убывающей последовательности и назвать ее 3-й член.

Т-2-6.

1. а) Какие из чисел: $-5, 345, 0, 49$ содержатся в последовательности $\{(3+n)^2\}$?

б) Имеет ли эта последовательность предел?

в) Является ли эта последовательность монотонной?

2. Написать первые четыре члена последовательности чисел, делящихся на 5, и назвать 3-й член этой последовательности.

Т-2-7.

1. а) Написать первые три члена последовательности $\left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}$.

б) Будет ли эта последовательность монотонной, и если да, то какой: возрастающей или убывающей?

в) Является ли эта последовательность ограниченной?

2. Придумать какую-нибудь формулу общего члена последовательности и написать 3-й член этой последовательности.

Т-2-8.

1. Записана бесконечная последовательность по формуле ее общего члена: $-3, 4, -5, 6, -7, \dots$

а) Написать ее 10-й член.

б) Какие из чисел: 2, 20, -30 , -31 являются членами этой последовательности? Найти номера членов, содержащих эти числа.

в') Написать формулу общего члена этой последовательности.

Задачи повышенной сложности к работе Т-2

1. Последовательность $\left\{ \frac{2n-1}{n+1} \right\}$ имеет предел, равный 2, при $n \rightarrow \infty$. Начиная с какого n , $|a_n - 2| < \frac{1}{10\,000}$?

2. Последовательность $\left\{ \frac{n}{2n+3} \right\}$ имеет предел, равный $\frac{1}{2}$, при $n \rightarrow \infty$. Начиная с какого n , $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{50\,000}$?

3. Будет ли последовательность $\left\{ \frac{n-1}{n^2} \right\}$ монотонной, и если да, то возрастающей или убывающей?

4. По формуле общего члена записаны последовательности:

а) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$ и б) $\frac{5}{2}, \frac{25}{4}, \frac{125}{8}, \frac{625}{16}, \dots$

Имеют ли эти последовательности предел? (Ответ обосновать.)

5. Записать общий член последовательности, которая начинается с шестого члена последовательности $\left\{ \frac{n+5}{4} \right\}$.

6. Записать общий член последовательности, которая начинается с третьего члена последовательности $\left\{ \frac{n^2-4}{2n-3} \right\}$.

Тренировочная работа Т-3

Т-3-1.

1. Найти пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+4}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+4}$.

2. Площадь круга равна 2 м^2 . Найти длину окружности.

3. а) Написать три первые члена и 5-й член последовательности $\left\{ \frac{n-1}{2n} \right\}$.

б) Будет ли эта последовательность монотонной и, если да, то убывающей или возрастающей?

в) Имеет ли эта последовательность предел?

Т-3-2.

1. По формуле общего члена записана последовательность $\frac{5}{4}, \frac{6}{8}, \frac{7}{12}, \frac{8}{24}, \dots$.

а) Написать 8-й член этой последовательности.

б) Написать формулу общего члена этой последовательности.

в) Является ли число 0,29 членом этой последовательности и, если да, то каков номер этого члена?

2. Найти пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5n^2-1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{5n^2-1}$.

Т-3-3.

1. Придумать какую-нибудь возрастающую последовательность и написать ее 4-й член.

2. По формуле общего члена записана последовательность $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$.

а) Написать 8-й член этой последовательности.

б) Написать формулу общего члена.

в) Является ли число 0,96 членом этой последовательности и, если да, то каков номер этого члена?

3. Площадь круга равна $4\pi \text{ м}^2$. Найти длину окружности.
Т-3-4.

1. Будет ли последовательность $\left\{ \frac{2n}{3n-1} \right\}$ монотонной и, если да, то возрастающей или убывающей?
2. Найти пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+3} + \frac{3}{n+3} \right)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2n}{n+1} \right)$.

3. Площадь круга равна $25\pi \text{ м}^2$. Найти длину окружности.
Т-3-5.

1. По формуле общего члена записана последовательность $\frac{2}{4}, \frac{5}{8}, \frac{8}{12}, \frac{11}{16}, \dots$.
а) Напишите 6-й член этой последовательности.
б') Является ли число 0,74 членом этой последовательности и, если да, каков номер этого члена?
2. Найти пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{n^2}{2n^2 - 1} \right)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}$.

3. Длина окружности равна $16\pi \text{ м}$. Найти площадь круга.
Т-3-6.

1. По формуле общего члена записана последовательность $\frac{5}{5}, \frac{10}{6}, \frac{15}{7}, \frac{20}{8}, \frac{25}{9}, \dots$.
а) Написать 8-й член этой последовательности.
б') Является ли число 4,6 членом этой последовательности и, если да, то каков номер этого члена?
2. Найти пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n-2}{n+2} \right)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{n^2}$.

3. Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3} \text{ м}$. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.
Т-3-7.

1. Будет ли последовательность $\left\{ \frac{n-2}{3n} \right\}$ монотонной и, если да, то возрастающей или убывающей?

2. Найти предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 2} - 2 \right)$.

3. Площадь квадрата равна 64 м^2 . Найти длину окружности, описанной около квадрата и вписанной в квадрат.
Т-3-8.

1. Найти предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 + n^2} - \frac{n}{n + 1} \right)$.

2. Длина окружности, описанной около правильного треугольника, равна $4\pi \text{ м}$. Найти:

а) сторону треугольника;

б) площадь треугольника.

3. Будет ли последовательность $\{n^2 - n\}$ монотонной?

Задачи повышенной сложности к работе Т-3

1. Найти пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{n^2}{n + 1} \right)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n - 1} - \frac{n^2 + 3}{n + 1} \right)$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{n^2 + 4}}{n + 2} - 1 \right)$.

2. Даны две последовательности: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ и $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ и составлена третья последовательность: $\{a_n\}$ путем сложения членов данных последовательностей с одинаковыми номерами. Чему равны a_{23} и a_{k+5} ?

Тренировочная работа Т-4

Т-4-1.

1. Сторона правильного шестиугольника равна a . Найти:

а) площадь шестиугольника;

б) площадь вписанного в шестиугольник круга;

в) длину описанной около шестиугольника окружности.

2. Найти высоту сегмента, имеющего радиус 2 м и дугу 120° .

Т-4-2.

1. Сторона правильного треугольника равна $2a\sqrt{3}$. Найти:

а) площадь треугольника;

б) площадь вписанного в треугольник круга;

в) длину описанной около треугольника окружности.

2. Найти площадь сектора, имеющего радиус 2 м и дугу 240° .

Т-4-3.

1. Диагональ квадрата равна $2\sqrt{2}$ м. Найти:

- а) площадь квадрата;
- б) площадь описанного около квадрата круга;
- в) длину вписанной в квадрат окружности.

2. Найти длину дуги, имеющей радиус a и содержащей 70° .

Т-4-4.

1. Длина окружности, вписанной в правильный треугольник, равна 8 м. Найти:

а) площадь круга, описанного около этого треугольника;

б) площадь треугольника.

2. Найти площадь сегмента, имеющего радиус 3 м и дугу 60° .

Т-4-5.

1. Радиус круга, вписанного в правильный шестиугольник, равен $2\sqrt{3}$. Найти:

а) площадь этого круга;

б) длину окружности, описанной около этого шестиугольника;

в) площадь шестиугольника.

2. Сколько градусов содержит дуга сектора, если длина дуги равна 20 см, а радиус сектора — 10 см?

Т-4-6.

1. Длина окружности 5 м. Найти:

а) площадь круга, ограниченного этой окружностью;

б) длину дуги окружности этого круга, если дуга содержит 230° ;

в) хорду дуги окружности этого круга, содержащую 120° .

Т-4-7.

Площадь круга 8 м^2 . Найти:

а) длину окружности.

б) площадь сектора данного круга, если дуга сектора содержит 72° ;

в) длину дуги этого круга, содержащей 17° .

Т-4-8.

Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, вписанного в круг, равна 8 м^2 . Найти:

а) длину описанной окружности;

- б) площадь круга;
в) площадь каждого из сегментов, отсекаемых от круга сторонами треугольника.

Задачи повышенной сложности к работе Т-4

1. Дуга, имеющая радиус, равный 6 м, и содержащая 120° (или 100° , или 84°), свернута в окружность. Найти радиус этой окружности.

2. Окружность радиуса 2 м разогнута в дугу радиусом 36 м. Найти центральный угол, измеряющий эту дугу.

3. Окружность радиуса 3 м разогнута в дугу, содержащую 96° . Найти радиус этой дуги.

4. В сектор с углом 60° и радиусом 3 м вписана окружность. Найти длину этой окружности.

5. В квадрат со стороной, равной $(2 + \sqrt{2})$ м, вписаны два равных круга так, что они касаются сторон противоположных углов и друг друга (точка касания окружностей в точке пересечения диагоналей квадрата). Найти радиус этих кругов.

Тренировочная работа Т-5

Т-5 (I серия)

Т-5-1.

1. Найти $\cos 25^\circ$, $\cos 136^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 129^\circ$ синусом острого угла.

3. Найти a , если $\frac{\sin 129^\circ}{28} = \frac{\sin 42^\circ}{a}$ (желательно по линейке решением пропорции).

4. Найти в треугольнике угол A , если $\cos A = 0,45$ (с точностью до градуса).

Т-5-2.

1. Найти $\cos 36^\circ$, $\cos 125^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 118^\circ$ синусом острого угла.

3. Найти b , если $\frac{\sin 118^\circ}{64} = \frac{\sin 35^\circ}{b}$ (желательно по линейке решением пропорции).

4. Найти в треугольнике угол C , если $\cos C = 0,26$ (с точностью до градуса).

Т-5-3.

1. Найти $\cos 15^\circ$, $\cos 147^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 145^\circ$ синусом острого угла.

3. Найти a , если $\frac{\sin 145^\circ}{32} = \frac{\sin 20^\circ}{a}$ (желательно по линейке решением пропорции).

4. Найти в треугольнике угол A , если $\cos A = 0,64$ (с точностью до градуса).

Т-5-4.

1. Найти $\cos 49^\circ$, $\cos 117^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 141^\circ$ синусом острого угла.

3. Найти в треугольнике сторону b , если $\frac{\sin 141^\circ}{44} = \frac{\sin 28^\circ}{b}$.

4. Найти в треугольнике угол A , если $\cos A = 0,36$ (с точностью до градуса).

Т-5-5.

1. Найти $\cos 56^\circ$, $\cos 154^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 123^\circ$ синусом острого угла.

3. Найти в треугольнике сторону c , если $\frac{56}{\sin 123^\circ} = \frac{c}{\sin 38^\circ}$.

4. Найти в треугольнике угол B , если $\cos B = 0,81$ (с точностью до градуса).

Т-5-6.

1. Найти $\cos 67^\circ$, $\cos 133^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 104^\circ$ синусом острого угла.

3. Найти в треугольнике сторону a , если $\frac{68}{\sin 104^\circ} = \frac{a}{\sin 19^\circ}$.

4. Найти в треугольнике угол C , если $\cos C = 0,19$ (с точностью до градуса).

Т-5-7.

1. Найти $\cos 70^\circ$, $\cos 172^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 121^\circ$ синусом острого угла.

3. Найти в треугольнике сторону b , если $\frac{15}{\sin 121^\circ} = \frac{b}{\sin 53^\circ}$.

4. Найти в треугольнике угол A , если $\cos A = 0,21$ (с точностью до градуса).

Т-5-8.

1. Найти $\cos 75^\circ$, $\cos 101^\circ$ (с точностью до сотой).

2. Заменить $\sin 115^\circ$ синусом острого угла.

$$3. \text{ Найти в треугольнике сторону } c, \text{ если } \frac{21}{\sin 115^\circ} = \frac{c}{\sin 44^\circ}.$$

4. Найти в треугольнике угол B , если $\cos B = 0,51$ (с точностью до градуса).

Т-5 (II серия)

Т-5-1.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 8,0$; $B \approx 35^\circ$; $C \approx 127^\circ$.
Найти:

- а) стороны b и c ;
- б') радиус описанной окружности.

Т-5-2.

В треугольнике ABC дано: $b \approx 44$; $C \approx 40^\circ$, $A \approx 64^\circ$.
Найти:

- а) стороны a и c ;
- б') биссектрису, проведенную из угла B .

Т-5-3.

В треугольнике ABC дано: $c \approx 57$, $C \approx 21^\circ$, $A \approx 7^\circ$.
Найти:

- а) стороны a и b ;
- б) высоту, проведенную из угла C .

Т-5-4.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 29$, $C \approx 50^\circ$, $B \approx 71^\circ$.
Найти:

- а) стороны b и c ;
- б') радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Т-5-5.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 6,8$, $A \approx 39^\circ$, $B \approx 128^\circ$.
Найти:

- а) стороны b и c ;
- б') h_a — высоту, проведенную из вершины угла A .

Т-5-6.

В треугольнике ABC дано: $b \approx 4,6$, $B \approx 65^\circ$, $A \approx 44^\circ$.
Найти:

- а) стороны a и c ;
- б') биссектрису, проведенную из угла A .

Т-5-7.

В треугольнике ABC дано: $c \approx 18$, $C \approx 40^\circ$, $B \approx 120^\circ$.
Найти:

- а) стороны a и b ;

б') радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Т-5-8.

В треугольнике ABC дано: $b \approx 37$, $B \approx 43^\circ$, $C \approx 65^\circ$.
Найти:

а) стороны a и c ;

б') радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Задачи повышенной сложности к работе Т-5

1. Найти ширину реки (H) согласно величинам, данным на рис. 34.

2. Диагональ параллелограмма равна 160 см и делит угол параллелограмма на два угла: 52° и 18° . Найти стороны параллелограмма и расстояние от вершины тупого угла до данной диагонали.

3. Для определения ширины непроходимого болота с вертолета, находящегося на высоте 450 м, измерили углы 44° и 16° (рис. 35). Найти ширину болота AB .

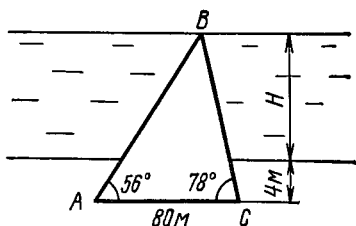


Рис. 34.

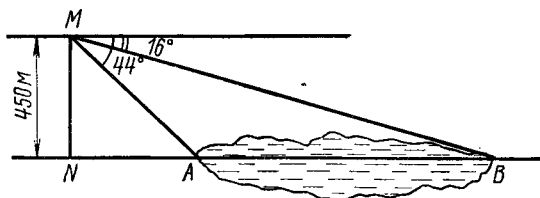


Рис. 35.

4*. Нужно определить высоту MN телевизионной антенны, которая отделена от нас рекой (рис. 36). Углы 47° и 42°

* Задача взята из учебника Н. Н. Никитина «Геометрия» (М., «Просвещение», 1967), где она решалась сложнее, так как ученики 8-го класса не знают теорему синусов. Ее можно быстро решить с применением логарифмической линейки.

измерены с помощью астролябии, высота (AC) которой равна 1,4 м. Базис $AB = 12$ м.

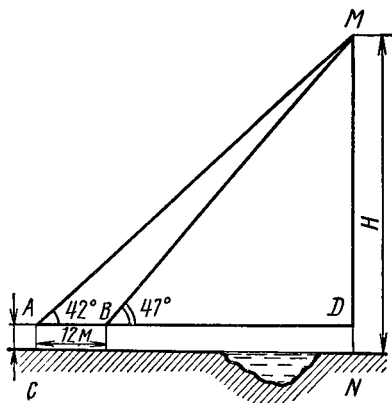


Рис. 36.

Тренировочная работа Т-6

Т-6-1.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 4,0$ м, $b \approx 5,0$ м, $c \approx 8,0$ м. Найти:

- углы треугольника;
- радиус окружности, описанной около треугольника.

Т-6-2.

В треугольнике ABC дано: $b \approx 4,0$ м, $c \approx 5,0$ м, $A \approx 102^\circ$. Найти:

- сторону a и угол B ;
- h_a — высоту, проведенную из вершины угла A .

Т-6-3.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 5,0$, $c \approx 7,0$, $B \approx 57^\circ$. Найти:

- сторону b и угол A ;
- h_c — высоту, проведенную из вершины угла C .

Т-6-4.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 11$ м, $b \approx 8,0$ м, $c \approx 5,0$ м. Найти:

- углы треугольника;
- площадь треугольника.

Т-6-5.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 9,0$ м, $c \approx 12$ м, $B \approx 42^\circ$. Найти:

а) сторону b и угол A ;

б') радиус окружности, описанной около треугольника.

Т-6-6.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 8,0$ м, $b \approx 9,0$ м, $c \approx 15$ м. Найти:

а) углы треугольника;

б') площадь треугольника.

Т-6-7.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 11$ м, $b \approx 15$ м, $c \approx 10$ м. Найти:

а) углы треугольника;

б') площадь треугольника.

Т-6-8.

В параллелограмме стороны равны 3,0 м и 4,0 м, а угол между ними 23° . Найти:

а) диагонали параллелограмма;

б') угол между диагоналями.

Задачи повышенной сложности к работе Т-6

(Задачи, подобные 1 — 3, встречаются в контрольной работе К-3, где они отмечены штрихом.)

1. В треугольнике ABC дано: $c \approx 4,0$ м, $a \approx 2,0$ м, $A \approx 21^\circ$. Найти угол C и сторону b .

2. В треугольнике ABC дано: $b \approx 8,0$ м, $c \approx 5,0$ м, $C \approx 36^\circ$. Найти угол B и сторону a .

3. В треугольнике ABC дано: $a \approx 10$ м, $b \approx 6,0$ м, $B \approx 37^\circ$. Найти угол A и сторону c .

4. Найти углы трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), если $AB \approx 5$ м, $BC \approx 6$ м, $CD \approx 7$ м и $AD \approx 16$ м.

5. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), вписанной в окружность, $AB \approx 3,0$ м, $AD \approx 8,0$ м, BD (диагональ) $\approx 6,0$ м. Найти радиус окружности.

6*. В параллелограмме одна из сторон равна $\sqrt{19}$ м, а диагонали 6 м и 10 м. Найти другую сторону параллелограмма.

Тренировочная работа Т-7

Т-7-1.

1. Вычислить в общем виде MK по указанным на рис. 37 данным.

* Теоремы о зависимости между сторонами и диагоналями параллелограмма в программе нет.

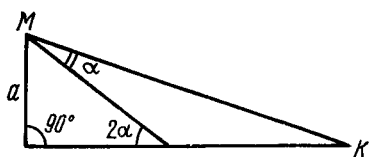


Рис. 37.

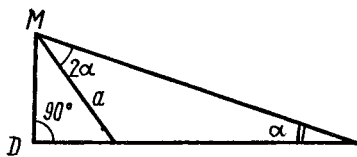


Рис. 38.

2. Допустим, что в треугольнике ABC дано: $a \approx 3$ м, $b \approx 5$ м, $c \approx 6$ м. Кратко рассказать (или написать), как найти углы этого треугольника (ход решения).

Т-7-2.

1. Вычислить в общем виде DM по указанным на рис. 38 данным.

2. Допустим, что в треугольнике дано: $a < c$, $A = \alpha < 90^\circ$. Сколько возможно здесь решений? Чему будет равен один из углов такого треугольника, если окажется, что решение одно?

Т-7-3.

1. Вычислить в общем виде CD по указанным на рис. 39 данным.

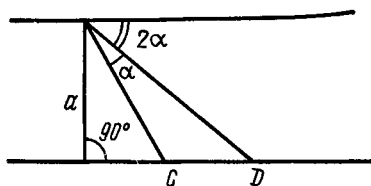


Рис. 39.

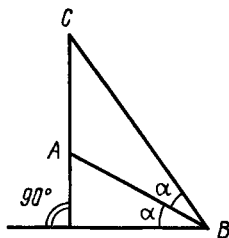


Рис. 40.

2. Допустим, что в треугольнике ABC дано: $a \approx 5$ м, $c \approx 3$ м, $A \approx 18^\circ$. Сколько возможно здесь решений? Кратко рассказать (или написать), как найти здесь сторону b и угол C . (Вычислений проводить не нужно).

Т-7-4.

1. Вычислить в общем виде AC по указанным на рис. 40 данным и учитывая, что $AB = a$.

2. Придумать такие данные в треугольнике, чтобы этот треугольник мог иметь два решения (ни одного, одно решение).

Т-7-5.

1. Найти сторону AB по указанным на рис. 41 данным.

2. В треугольнике ABC дано: $a \approx 3$ м, $b \approx 7$ м, $A \approx 20^\circ$. Найти угол B .

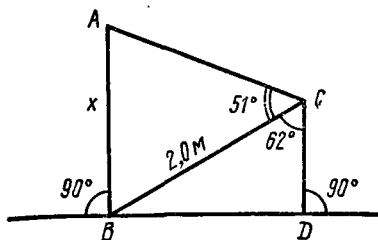


Рис. 41.

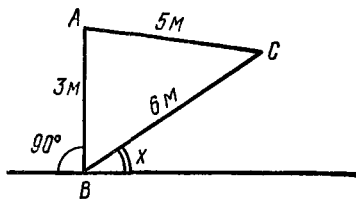


Рис. 42.

Т-7-6.

Найти угол x по указанным на рис. 42 данным.

Т-7-7.

Найти сторону AB по указанным на рис. 43 данным.

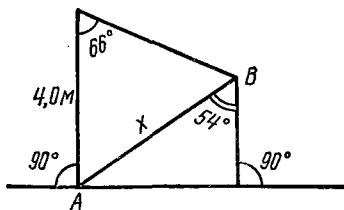


Рис. 43

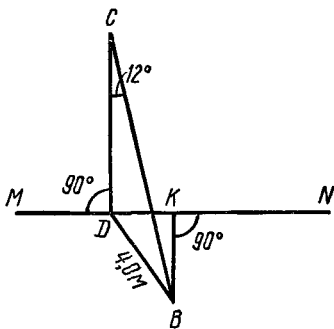


Рис. 44.

Т-7-8.

Найти BK по указанным на рис. 44 данным, если $CB = 11$ м.

Задачи повышенной сложности к работе Т-7

1. Сумма двух сторон треугольника равна 13 м, а угол между этими сторонами 60° . Площадь треугольника равна $10\sqrt{3}$ м². Найти стороны треугольника.

2. Стороны треугольника относятся как $3 : 5 : 7$. Найти больший угол треугольника.

3. Зная формулы $a = 2R \sin A$ и $S_{\Delta} = \frac{ab \sin C}{2}$, докажите, что $R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$, где a, b, c — стороны треугольника, S_{Δ} — площадь треугольника, R — радиус окружности, описанной около этого треугольника.

4. Найти острые углы прямоугольного треугольника, если R (радиус описанной окружности) равен 2 м, а высота, проведенная к гипотенузе, равна $\sqrt{3}$ м.

5. Отрезок BC , равный 4 дм, движется концами по сторонам угла A , равного 30° . Какую геометрическую фигуру опишут при этом центры окружностей, описанных около этих треугольников?

Тренировочная работа Т-8

Т-8-1.

а) Найти точку пересечения прямой, проходящей через точки M и P , с плоскостью α (рис. 45).

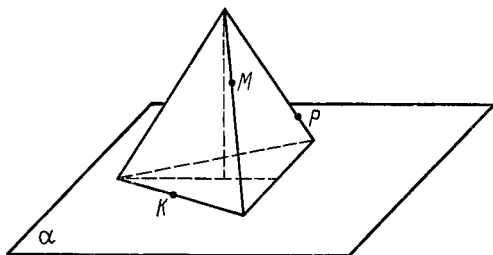


Рис. 45.

б) Провести сечение через точки M, P и K (рис. 45).

Т-8-2.

а) Найти точку пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через точки M и D (рис. 46).

б) Провести сечение через точки M, D и K (рис. 46).

Т-8-3.

а) Найти точку пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через точки M и P (рис. 47).

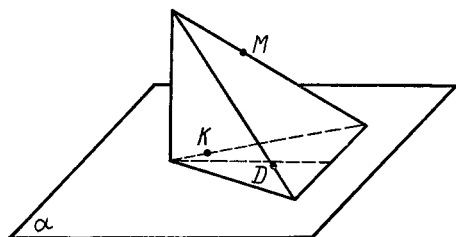


Рис. 46.

б) Провести сечение через точки M , P и K (рис. 47).

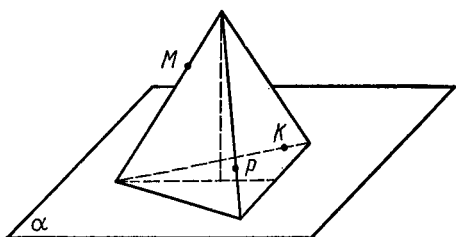


Рис. 47.

Т-8-4.

а) Найти точку пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через точки M и D (рис. 48).

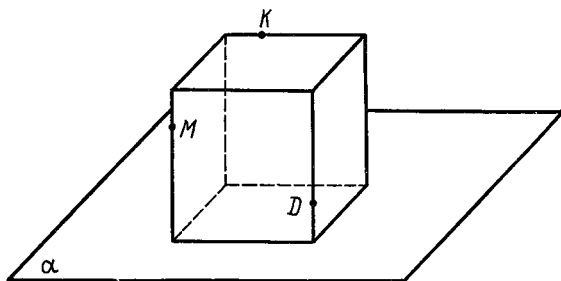


Рис 48.

б) Провести сечение через точки M , D и K (рис. 48).

Т-8-5.

а) Найти точку пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через точки M и P (рис. 49).

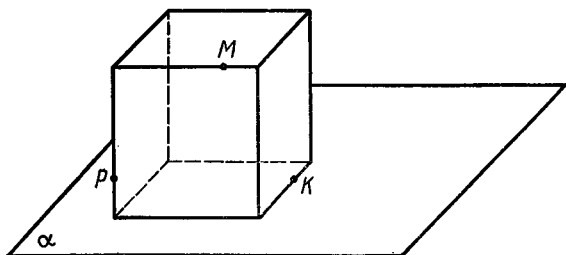


Рис. 49

б) Провести сечение через точки M , P и K (рис. 49).

Т-8-6.

а) Найти точку пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через точки M и D (рис. 50).

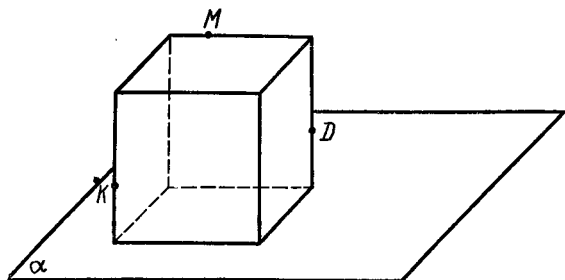


Рис. 50.

б) Провести сечение через точки M , D и K (рис. 50).

Т-8-7.

а) Найти точку пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через точки A и C . AB и CD перпендикулярны плоскости α (рис. 51).

б) Провести сечение через прямую MN и точку K (рис. 52).

Т-8-8.

а) Найти точку пересечения прямой MN с плоскостью α (рис. 53).

б) Провести сечение через прямую MN и точку K (рис. 53).

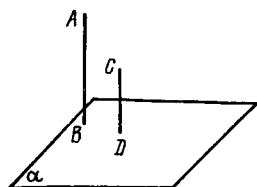


Рис. 51.

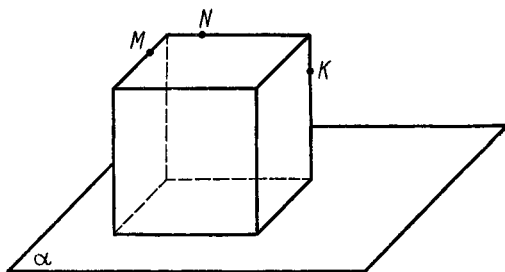


Рис. 52.

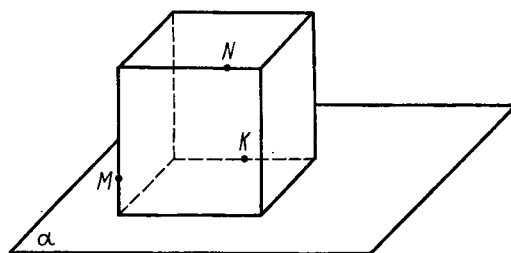


Рис. 53.

Задачи повышенной сложности к работе Т-8

1. а) Найти точку пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через точки A и C . AB и CD перпендикулярны к плоскости α (рис. 54).

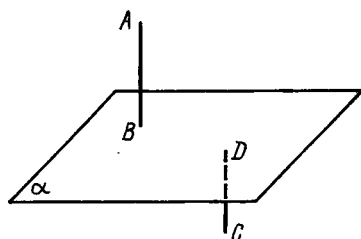


Рис. 54.

б) Найти линию пересечения плоскости, проходящей через точки A , C , E , с плоскостью α (рис. 55).

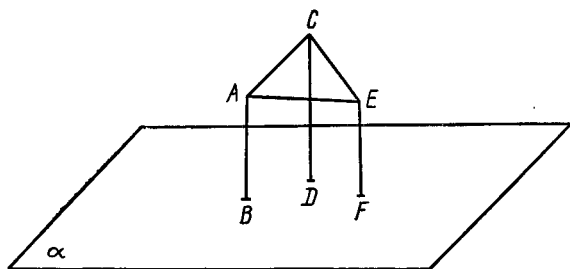


Рис. 55.

2. Точка K принадлежит плоскости α . Провести плоскость через точки M , N и K (рис. 56).

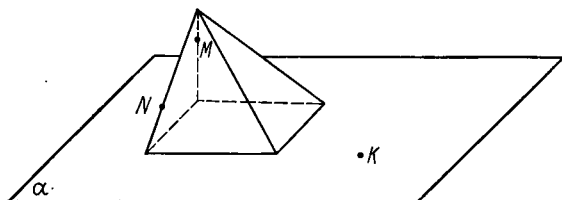


Рис. 56.

3. Провести плоскость через точки M , N и K . Точка K принадлежит плоскости α (рис. 57).

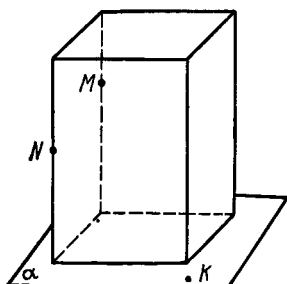


Рис. 57.

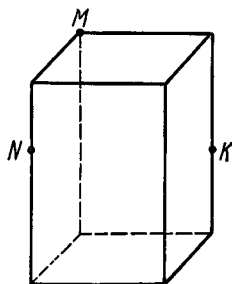


Рис. 58.

4. Провести сечение через точки M , N и K (рис. 58).
5. Провести сечение через точки M , N и K (рис. 59).

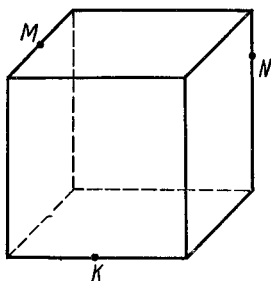


Рис. 59.

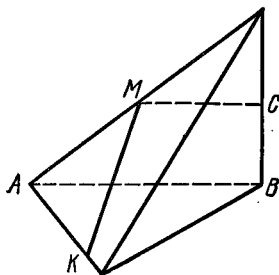


Рис. 60.

Тренировочная работа Т-9

Т-9-1.

1. Провести сечение через прямую MC , параллельную AB , и прямую MK (рис. 60).

2. Из точки, отстоящей от плоскости α на расстояние 2 м, проведены две наклонные, составляющие между собой угол 60° , а с плоскостью α — одна угол 60° , другая — 30° . Найти:

- длины наклонных;
- расстояние между концами наклонных.

Т-9-2.

1. Провести сечение через прямую MC , параллельную AB , и прямую CK (рис. 61).

2. Из точки A к плоскости проведены две наклонные, составляющие с плоскостью углы: одна 45° , другая — 60° , а между собой — угол 30° . Найти:

а) расстояние точки A от плоскости, если меньшая наклонная равна $2\sqrt{3}$ м;

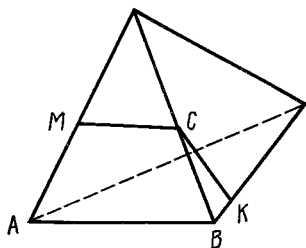


Рис. 61.

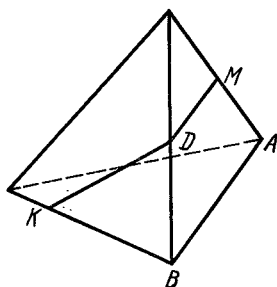


Рис. 62.

- б) вторую наклонную;
- в) расстояние между наклонными.

Т-9-3.

1. Провести сечение через прямую MD , параллельную AB , и прямую KD (рис. 62).

2. Из одной точки проведены две наклонные под углами соответственно 45° и 30° к плоскости. Меньшая из проекций наклонных равна $\sqrt{2}$ м. Найти:

- а) расстояние точки от плоскости и другую наклонную;
- б) расстояние между концами наклонных, если угол между проекциями наклонных 150° .

Т-9-4.

1. Провести сечение через прямую MK , параллельную AB , и прямую DK (рис. 63).

2. Из точки A проведены две наклонные: одна под углом 30° , другая — 60° к плоскости. Большая наклонная равна $2\sqrt{3}$ м. Найти:

- а) расстояние точки A до плоскости и вторую наклонную;
- б) расстояние между концами наклонных, если угол между проекциями наклонных 120° .

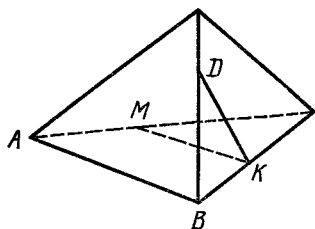


Рис. 63.

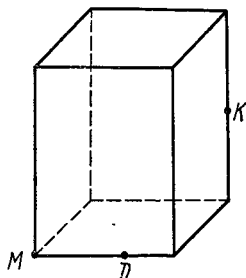


Рис. 64.

Т-9-5.

1. Большая сторона (AD) трапеции $ABCD$ находится на плоскости α , а сторона BC — вне плоскости α . B' и C' — соответственно проекции B и C на плоскость α .

а) Будет ли BC параллельна плоскости α и $B'C' \parallel AD$? (Объяснить.)

б) Определить вид фигуры $AB'C'D$.

2. Провести сечение через точки M , D и K (рис. 64).

Т-9-6.

1. Сторона AD ромба $ABCD$ параллельна плоскости α . B' и C' — проекции точек B и C на плоскость α .

а) Будет ли BC параллельна плоскости α и $B'C' \parallel AD$?

б) Определить вид фигуры $AB'C'D$.

2. Провести сечение через точки M , A и K (рис. 65).

Т-9-7.

1. Сторона AF правильного шестиугольника $ABCDEF$ находится на плоскости α , а другие — вне ее.

а) Есть ли среди сторон этого шестиугольника такая, которая была бы параллельна плоскости α ?

б) Будет ли BE параллельна плоскости α ?

в) Будет ли проекция шестиугольника на плоскость α правильным шестиугольником? (Все ответы обосновать.)

2. Провести сечение через точки M , C и K (рис. 66).

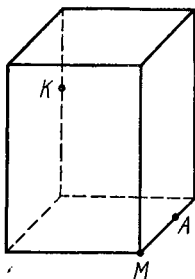


Рис. 65.

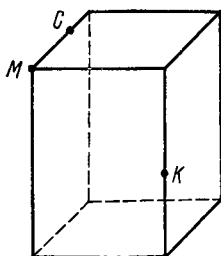


Рис. 66

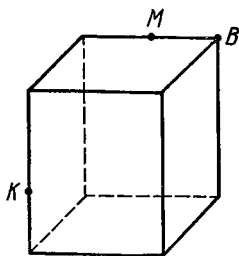


Рис. 67.

Т-9-8.

1. Одна из сторон AE правильного пятиугольника $ABCDE$ находится на плоскости α , а другие — вне плоскости α .

а) Есть ли среди сторон этого пятиугольника такие, которые были бы параллельны плоскости α ?

б) Будет ли диагональ BD параллельна плоскости α ?

в) Будет ли проекция правильного пятиугольника на плоскость правильным пятиугольником? (Все ответы обосновать.)

2. Провести сечение через точки M , B и K (рис. 67).

Задачи повышенной сложности к работе Т-9

1. В кубе провести сечение через DC и точку M , принадлежащую плоскости $AB'B$ (рис. 68).

2. Прямая $MP \parallel AB$. Провести сечение через MP и точку K (рис. 69).

3. В кубе $MP \parallel AC$ (рис. 70). Провести сечение через MP и точку K , лежащую в плоскости $AC'S$.

4. В призме $MP \parallel AB$ (рис. 71). Провести сечение этой призмы плоскостью, проходящей через MP и PK .

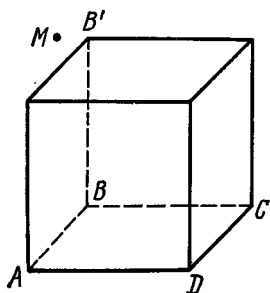


Рис. 68.

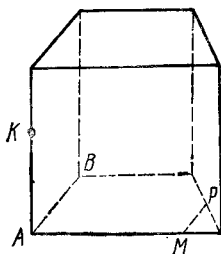


Рис. 69.

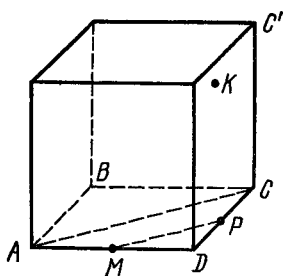


Рис. 70.

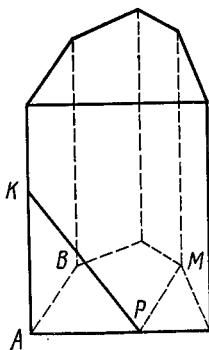


Рис. 71.

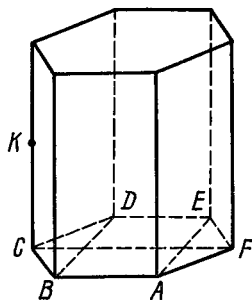


Рис. 72.

5. В правильной шестиугольной призме провести сечение через AF и точку K (рис. 72).

6. Из точки A проведены две наклонные AB и AC под углами к плоскости соответственно 45° и 30° . Угол между проекциями наклонных 150° , а расстояние между концами наклонных $2\sqrt{7}$ м.

а) Найти расстояние точки A до плоскости.

б) Доказать, что $\angle BAC < 150^\circ$, зная, что чем больше угол (в пределах от 0° до 180°), тем меньше значение косинуса этого угла, и, наоборот, чем меньше значение косинуса угла, тем больше угол.

7. Из точки A проведены две наклонные AB и AC под углами соответственно 60° и 30° к плоскости. Угол между проекциями наклонных 120° , а расстояние между концами наклонных $\sqrt{13}$ м. Найти наклонные.

8. Из точки A к плоскости проведены две равные наклонные AB и AC , составляющие между собой угол 60° , а между проекциями угол 120° . Найти отношение наклонной к ее проекции.

Тренировочная работа Т-10

Т-10-1.

а) В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с ребром $MA = 6$ см провести сечение через точку P , лежащую на ребре MA ($MP = 2$ см), параллельно основанию.

б) Доказать, что в сечении получили квадрат.

в) Найти площадь сечения, если площадь основания равна 36 см^2 .

Т-10-2.

а) В правильной треугольной пирамиде провести сечение через середину бокового ребра параллельно основанию.

б) Доказать, что в сечении получился правильный треугольник.

в) Найти площадь сечения, если площадь основания равна 4 м^2 .

Т-10-3.

а) В кубе $ABCD A'B'C'D'$ провести сечение через $D'M$ (M на середине AD) и точку K (K на середине $C'C$).

б) В этом же кубе провести сечение через вершину A параллельно первому сечению.

в) Найти угол между $B'B$ и AC .

Т-10-4.

а) В правильной четырехугольной пирамиде через основание высоты провести сечение параллельно боковой грани.

б) Доказать, что в сечении получили фигуру, равную одной из фигур, получившихся при рассечении боковой грани средней линией, параллельной ребру основания пирамиды.

Т-10-5.

а) В кубе $ABCD A'B'C'D'$ провести два сечения: одно через AB' и середину $C'C$, а другое через середину $B'B$ параллельно первому сечению.

б) Найти угол между $A'C'$ и DC .

Т-10-6.

а) В правильной треугольной пирамиде провести сечение через основание высоты параллельно боковой грани.

б) Доказать, что в сечении получился треугольник, подобный боковой грани.

в) (н.о.) Найти площадь сечения, если площадь боковой грани равна 36 м^2 .

Т-10-7.

В кубе $ABCD A'B'C'D'$ провести сечения: а) одно через прямую $A'M$ (M — середина $B'C'$) и точку K (K — середина DC); б') другое через точку F (F — середина MC') параллельно первому сечению.

Т-10-8.

В кубе $ABCD A'B'C'D'$ на ребре AA' дана точка M ($AM = 2/3 A'A$), на ребре DD' точка N ($DN = 1/3 DD'$).

а) Провести сечение через прямую MN и точку B' .

б') Провести сечение через точку D параллельно плоскости MNB' .

в) Доказать, что полученные сечения — ромбы.

г) Доказать, что эти ромбы равны.

Задачи повышенной сложности к работе Т-10

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ проведено сечение через середины ребер BM , BC и BA . Провести сечение через середину ребра AD параллельно данному сечению.

2. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ проведено сечение через середины ребер $A'B'$ и $A'D'$ и вершину A . Провести сечение через середину $D'C'$ параллельно данному сечению и найти его периметр, если ребро куба равно 2 м .

3. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ проведено сечение через середины ребер BB' , BC и BA . Провести сечение через точку K (K — середина ребра CC') параллельно данному сечению.

4. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ проведено сечение через AC и середину $B'B$. Провести сечение через середину $A'D'$ параллельно данному сечению. Чему будет равен периметр этого сечения, если ребро куба равно 4 м ?

5. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ проведено сечение через AC и середину ребра MB . Провести сечение параллельно данному через точку K , лежащую на ребре AD ($DK = 1/4 AD$).

6. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ точка O — центр грани $A'B'C'D'$. Через середину отрезка BO и вершины A и C про-

ведено сечение. Провести сечение через точку K (K — середина DC) параллельно данному сечению. Найти периметр сечения, если ребро куба равно 4 м.

7. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через центр основания параллельно боковому ребру. Провести сечение через середину ребра основания параллельно данному сечению.

8. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через середины двух боковых ребер не параллельно основанию. Провести сечение через точку K , лежащую в основании, параллельно данному сечению.

Тренировочная работа Т-11

Т-11-1.

1. Отрезок BC спроектирован на прямую AD , $CM = \frac{1}{4} BC$ (рис. 73). Найти:

а) расстояние середины отрезка BC до AD ;

б') расстояние от точки M до AD .

2. Если ромб спроектировать на плоскость α , то какой фигурой может быть его проекция?

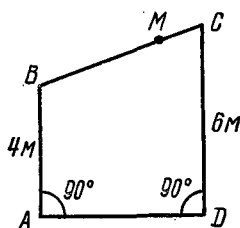


Рис. 73.

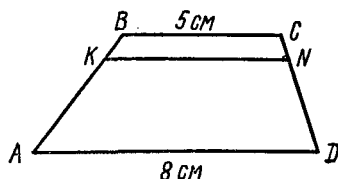


Рис. 74.

Т-11-2.

1. В трапеции $ABCD$ $KN \parallel AD$, $AK = 4 KB$ (рис. 74). Найти:

а) среднюю линию трапеции;

б') KN .

2. Если квадрат спроектировать на плоскость, то какой фигурой может быть его проекция?

Т-11-3.

Треугольник ABC спроектирован на плоскость α . Вершины A , B и C отстоят от плоскости соответственно на расстояния 2 м, 3 м и 4 м. Найти:

а) расстояние середины стороны BC до плоскости α ;

б') расстояние точки пересечения медиан треугольника ABC до плоскости α .

Т-11-4.

Прямоугольный треугольник ABC с катетами AC и BC спроектирован на плоскость α . Вершины A , B и C отстоят от плоскости на расстояния соответственно 8 м, 6 м и 5 м. Найти:

а) расстояние центра описанной около треугольника окружности до плоскости α ;

б') расстояние точки пересечения медиан треугольника до плоскости α .

Т-11-5.

Равносторонний треугольник ABC спроектирован на плоскость α . Вершины A , B и C отстоят от плоскости на расстояния, соответственно равные 5 м, 7 м и 10 м. Найти:

а) расстояние от середины стороны AB до плоскости α ;

б) расстояние от центра треугольника до плоскости α .

Т-11-6*.

а) Построить правильную шестиугольную пирамиду, у которой сторона основания равна 1,5 см (3 клетки), высота 4 см (8 клеток).

б) Найти расстояние от середины бокового ребра AM (M — вершина пирамиды) до основания пирамиды.

в) Найти расстояние от точки K , лежащей на этом ребре до основания пирамиды, если $MK : KA = 1 : 3$.

Т-11-7*.

а) Построить правильную треугольную пирамиду, у которой сторона основания равна 3 см (6 клеток) и высота равна 4 см (8 клеток).

б) Найти расстояние от середины апофемы пирамиды до плоскости основания.

в') Найти расстояние от точки пересечения медиан боковой грани пирамиды до плоскости основания.

Т-11-8*.

а) Построить пирамиду, в основании которой прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 4 см (8 клеток), и углом 30° ; высота пирамиды 4,5 см (9 клеток), она проходит через середину гипотенузы.

б') Будет ли плоскость, проходящая через точки пересечения медиан боковых граней пирамиды, параллельна основанию пирамиды? (Ответ обосновать.)

* Все построения выполняются в кабинетной проекции в тетрадах в клетку.

1. Трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) спроектирована на плоскость α . $BC : AD = 2 : 3$. Точки A , B , C отстоят от плоскости соответственно на 5 м, 8 м, 10 м. Найти расстояние точки D от плоскости α .

2. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ спроектирован на плоскость α . Вершины A , B , C отстоят от плоскости соответственно на 8 м, 10 м, 12 м. Найти расстояния остальных вершин от плоскости α .

3. Доказать, что расстояние точки пересечения медиан треугольника до плоскости равно $\frac{1}{3}$ суммы расстояний вершин треугольника до этой плоскости.

4. Прямоугольный треугольник так расположен над плоскостью α , что только две его вершины находятся на одинаковом расстоянии от плоскости. Будет ли проекция этого треугольника на плоскость α прямоугольным треугольником, если проектирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций?

5. Равносторонний треугольник так расположен над плоскостью α , что только две его вершины находятся на одинаковом расстоянии от плоскости. Может ли проекция этого треугольника на плоскость быть равносторонним треугольником? (Ответ обосновать.)

Тренировочная работа Т-12

Т-12-1.

1. Две прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Точки пересечения на одной прямой A , B и C , им соответствуют на второй прямой точки A' , B' и C' . $AB : BC = 4 : 1$, $A'C' = 20$ м. Найти $A'B'$.

2. Два отрезка заключены между параллельными прямыми: один равен $\sqrt{5}$ м, другой — $\sqrt{40}$ м. Проекция одного из них на одну прямую равна 6 м. Найти проекцию другого отрезка на другую прямую.

Т-12-2.

Две прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Точки пересечения на одной прямой A , B и C , им соответствуют на другой прямой точки A' , B' и C' . $A'C' : A'B' = 6 : 1$. $BC - AB = 8$ м. Найти BC .

Т-12-3.

Две прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Точки пересечения на одной прямой A , B и C , им соответствуют на второй прямой точки A' , B' и C' .

а) $AB : BC = 2 : 3$, $B'C' = 21$ м. Найти $A'C'$.

б) $A'A = 4$ м, $B'B = 6$ м. Найти $C'C$.

Т-12-4.

1. Между двумя параллельными прямыми проведены два отрезка. Проекция одного отрезка на прямую равна $\sqrt{11}$ м. Один из отрезков равен $5\sqrt{2}$ м. Найти другой отрезок, если расстояние между прямыми равно $\sqrt{14}$ м.

2. Построить правильную шестиугольную пирамиду, у которой ребро основания равно 1,5 см (3 клетки), а боковое ребро — 2,5 см (5 клеток).

Т-12-5.

1. Отрезок AB разделен точкой C на два отрезка — 20 см и 50 см. A' , C' и B' — проекции точек A , C и B на плоскость. Найти $B'C'$, если $A'C' = 16$ см.

2. Построить правильную четырехугольную пирамиду, у которой диагональ основания равна 3 см (6 клеток), а высота 4 см (8 клеток).

Т-12-6.

1. Два параллельных отрезка AB и CD спроектированы на плоскость: $A'B'$ и $C'D'$ — соответственно проекции этих отрезков на плоскость. $AB = 40$ см, $CD = 30$ см, $A'B' = 24$ см. Чему равен отрезок $C'D'$?

2. Постройте произвольную треугольную пирамиду и через точку, лежащую на ребре основания, проведите плоскость, параллельную боковой грани пирамиды.

Т-12-7.

1. Даны два параллельных отрезка AB и CD и их проекции на плоскость соответственно $A'B'$ и $C'D'$. $A'B' = 2$ м, $C'D' = 3$ м, $AB = 6$ м. Найти CD .

2. Построить произвольную четырехугольную пирамиду и через точку, взятую на боковом ребре, провести плоскость, параллельную основанию.

Т-12-8.

Отрезок прямой разделен точкой C так, что $AC : CB = 3 : 7$. A' , B' и C' — проекции точек A , B и C на плоскость α .

а) $C'B' - A'C' = 8$ см. Найти CB .

б) Найти $A'A$, если $C'C = 5$ м, $B'B = 12$ м.

Задачи повышенной сложности к работе Т-12

1. Через вершину правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ с боковым ребром 3 м проведена плоскость α параллельно плоскости β основания пирамиды. MAC — рав-

носторонний треугольник. На ребрах MA и MC взяты точки K ($AK = 1$ м) и P ($CP = 2$ м). Через K и P проведен отрезок, упирающийся концами в плоскости α и β и делящийся точками P и K на 3 отрезка, отношение проекций которых на плоскость β надо найти.

2. Два отрезка, разность которых составляет 15 см, упираются своими концами в две параллельные плоскости. Проекция этих отрезков равны 24 см и $\sqrt{51}$ см. Найти эти отрезки.

3. Два отрезка AB и CD упираются своими концами в две параллельные плоскости: α и β (точки A и C принадлежат плоскости α). Угол между AB и CD равен 90° , а проекции этих отрезков равны 2 м и 6 м. Найти сами отрезки.

Тренировочная работа Т-13

Т-13-1.

В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 4 м, $AB = 3$ м, $BC = 2\sqrt{5}$ м. Найти:

- площади граней MAD и MDC ;
- расстояние от точки B до плоскости AMD ;
- угол MDB .

Т-13-2.

В основании пирамиды $MABC$ — прямоугольный треугольник ABC : $C = 90^\circ$, $AB = 25$ м, $BC = 24$ м. Ребро MA перпендикулярно плоскости ABC и равно 24 м.

- Найти площадь грани MBC .
- Найти расстояние от точки A до плоскости MCB .
- Доказать, что $\angle MCA > \angle MBA$.

Т-13-3.

В основании пирамиды $MABC$ — прямоугольный треугольник ABC : $C = 90^\circ$, $AB = 5$ м, $AC = 4$ м. Ребро MC равно 2,4 м и перпендикулярно плоскости ABC .

- Найти площадь грани AMB .
- Найти расстояние от точки C до плоскости AMB .
- Доказать, что $\angle MBC > \angle MAC$.

Т-13-4.

В основании пирамиды $MABC$ — прямоугольный треугольник ABC : $C = 90^\circ$ с меньшим катетом AC , равным $2\sqrt{3}$ м, и углом 30° . Высота пирамиды равна 4 м и проходит через середину гипотенузы. Найти:

- площадь грани MAC ;
- расстояние от основания высоты до боковой грани MAC .

Т-13-5.

В основании пирамиды $MABC$ — треугольник ABC , в котором $B = 60^\circ$, одно боковое ребро (MB) перпендикулярно основанию пирамиды и равно $\sqrt{3}$ м, другое наклонено к основанию под углом 30° , третье — под углом 60° .

- Найти боковые ребра пирамиды.
- Найти ребро AC .
- Провести высоту грани MAC (с объяснением).

Т-13-6.

Из точки, отстоящей от плоскости на 3 м, проведены две наклонные — DA и DC ; одна из них под углом 45° к плоскости, другая равна $\sqrt{34}$ м. Угол между проекциями равен 120° .

- Найти длину второй наклонной.
- Найти расстояние между концами наклонных.
- Построить кратчайший отрезок между D и AC .

Т-13-7.

Из вершины треугольника ABC ($C = 90^\circ$, $A = 30^\circ$) восстановлен перпендикуляр AM к плоскости треугольника, равный 3 см. Из точки M проведены две наклонные — MB и MC ; MC составляет с плоскостью треугольника угол 60° .

- Найти наклонную MB .
- Найти расстояние от точки M до BC .
- Доказать, что $\angle MBA < 60^\circ$.

Т-13-8.

Из вершины треугольника ABC ($AB = 13$ м, $BC = 40$ м, $AC = 37$ м) восстановлен перпендикуляр AM к плоскости треугольника, равный 5 м. Найти:

- расстояние от точки M до стороны BC ;
- расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки M , B и C .

Задачи повышенной сложности к работе Т-13

1. Дан ромб с углом $A = 30^\circ$ и стороной, равной $6a$. Из вершины A восстановлен к плоскости ромба перпендикуляр AM , равный $4a$. Найти расстояние от M до сторон ромба.

2. Дан правильный шестиугольник со стороной $2a$. Из вершины A шестиугольника восстановлен перпендикуляр AM к его плоскости, равный a . Найти расстояние от M до сторон шестиугольника.

3. В треугольной пирамиде $MABC$ $AM \perp BC$, $AF \perp$ пл. MCB , $MO \perp$ пл. ABC . Доказать, что AF и MO лежат в одной плоскости.

4. В правильной четырехугольной пирамиде с ребром основания 6 м и высотой 4 м найти расстояние от вершины основания пирамиды до плоскости боковой грани.

5. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ проведено сечение $AB'C$. Будет ли BD' перпендикулярно сечению? (Ответ обосновать.) В каком отношении BD' делится плоскостью сечения?

Тренировочная работа Т-14

Т-14-1.

1. Из двух точек A и B плоскости α проведены $AC \perp \alpha$ и $BD \perp \alpha$. $AC = 5$ м, $BD = 29$ м, $CD = 25$ м.

а) Доказать, что AC и BD лежат в одной плоскости.

б) Найти AB .

2. Доказать, что если в пирамиде боковые ребра равны, то высота проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

Т-14-2.

1. Из двух точек плоскости α проведены два перпендикуляра к плоскости: $AC = 2$ м и $BD = 6$ м (A и B находятся в плоскости α).

а) Доказать, что AD и BC пересекаются.

б) Найти расстояние от точки пересечения AD и BC до плоскости α .

2. Доказать, что если в пирамиде высоты боковых граней, проведенных из вершины пирамиды, равны, то высота пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

Т-14-3.

1. Из двух точек A и B , лежащих вне плоскости α , проведены к ней два перпендикуляра— AC и BD (C и D лежат на плоскости α); $AC = 8$ м, $BD = 4$ м. Точка M — середина AC , точка K — середина DB .

а) Доказать, что MK и CD лежат в одной плоскости.

б) Найти расстояние от середины MK до плоскости α .

2. Доказать, что если боковые ребра в пирамиде наклонены к основанию под одним углом, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

Т-14-4.

1. Пирамида пересечена плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды и перпендикулярно высоте. Найти периметр сечения и площадь сечения, если периметр и площадь основания соответственно равны 12 м и 16 м².

2. Доказать, что если в пирамиде высоты боковых граней,

проведенные из вершины пирамиды, наклонены к ее основанию под одним углом, то высота пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

Т-14-5.

Из двух точек A и B плоскости α проведены $AC \perp \text{пл. } \alpha$ и $BD \parallel AC$; $AB = 12$ м, $CD = 13$ м, $BD = 6$ м, $BD < AC$. Найти:

- а) отрезок AC ;
- б) расстояние от точки B до точки пересечения прямой CD с плоскостью α ;
- в') угол DCA .

Т-14-6.

1. Проведя плоскость, перпендикулярную MN , доказать, что $AB \parallel CD$, если $AB \parallel MN$ и $CD \parallel MN$, не применяя теоремы о параллельности двух прямых, порознь параллельных третьей.

2. Доказать, что в правильной четырехугольной пирамиде два боковых ее ребра перпендикулярны диагонали основания пирамиды.

Т-14-7.

1. Дано: $a \perp \alpha$, точка B принадлежит плоскости α . Провести прямую через точку B , перпендикулярную плоскости α .

2. $a \parallel b$. Плоскость α проходит через прямую a и пересекает плоскость β , проходящую через прямую b . Доказать, что линия пересечения этих плоскостей параллельна a и b .

Т-14-8.

1. В правильной четырехугольной пирамиде провести перпендикуляр к плоскости основания через точку, лежащую на основании пирамиды (не на диагонали основания), и найти точку пересечения этого перпендикуляра с боковой гранью.

2. Доказать, что в кубе $ABCD A'B'C'D'$ $B'D \perp AC$.

Задачи повышенной сложности к работе Т-14

1. Начертить правильную треугольную пирамиду $MABC$ (рис. 75). AMN лежит во фронтальной плоскости, $OM = AN = 4,5$ см (9 клеток), $NC = NB = 1$ см (2 клетки). Возьмите примерно на середине MB точку E . Через эту точку проведите перпендикуляр к плоскости $СМВ$ и найдите точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью основания.

2. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ проведена плоскость через $AB'C$,

а) Спроектировать треугольник $AB'C$ на плоскость $AA'D'$.

б) Спроектировать $A'D'$ на плоскость $AB'C$.

3. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ проведена плоскость через MNK (M, N, K — соответственно середины ребер $AA', A'B', B'C'$). Спроектировать DD' на эту плоскость и найти длину проекции, если ребро куба равно 4 м.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ спроектировать отрезок NK (N — середина BC , K — середина CD) на плоскость AMB .

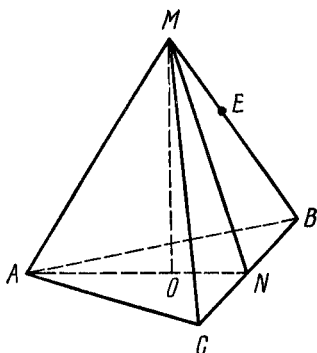


Рис. 75.

Тренировочная работа Т-15

Т-15-1.

1. В прямоугольном треугольнике стороны равны 3 м, 4 м, 5 м. Найти высоты треугольника и радиусы окружностей, описанной около треугольника и вписанной в треугольник.

2. Через гипотенузу AB треугольника ABC проведена плоскость P под углом α к плоскости треугольника.

а) Сделать чертеж и на нем указать линейный угол α и высоту h_c треугольника ABC .

б') Доказать, что угол α больше углов, образуемых AB и BC с плоскостью P .

Т-15-2.

1. Сторона ромба равна 4 м, угол 30° . Найти высоту ромба, радиус вписанной в ромб окружности и площадь ромба.

2. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость P под углом β к плоскости ромба.

а) Сделать чертеж и на нем указать линейный угол β , высоту ромба и радиус окружности, вписанной в ромб.

б') Доказать, что угол β больше угла, образованного CD с плоскостью P .

Т-15-3.

1. В равнобедренной трапеции параллельные стороны равны 3 м и 5 м, а угол 45° . Найти высоту и площадь трапеции. В каком отношении делятся диагонали точкой их пересечения?

2. Через большее основание равнобедренной трапеции

проведена плоскость P под углом γ к плоскости трапеции.

а) Сделать чертеж и на нем указать линейный угол γ и высоту трапеции.

б') Доказать, что угол γ больше угла, образованного боковой стороной трапеции с плоскостью P .

Т-15-4.

1. В параллелограмме стороны равны 2 м и 5 м, угол 60° . Найти высоту и площадь параллелограмма.

2. Через большую сторону параллелограмма проведена плоскость P под углом α к плоскости параллелограмма.

а) Сделать чертеж и на нем указать линейный угол α и высоту параллелограмма.

б') Доказать, что угол α больше угла, образованного меньшей стороной параллелограмма с плоскостью P .

Т-15-5.

1. В параллелограмме диагонали равны 4 м и 10 м, угол между ними 60° . Найти площадь параллелограмма и одну из сторон параллелограмма.

2. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость P под углом 30° к плоскости ромба. Высота ромба равна 4 м. Сделать чертеж и найти расстояние BC от плоскости P .

Т-15-6.

В основании пирамиды $MABC$ прямоугольный треугольник ABC , в котором $AC = 6$ м, $BC = 8$ м, $AB = 10$ м; MA — высота пирамиды. Грань MBC наклонена к основанию под углом α .

а) Сделать чертеж и на нем указать линейный угол α .

б) Найти площадь каждой боковой грани пирамиды.

Т-15-7.

В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольник, в котором $AB = 3$ м, $AD = 4$ м; MA — высота пирамиды. Две боковые грани наклонены под углами α и 3α к основанию.

а) Сделать чертеж и на нем отметить линейные углы α и 3α .

б) Найти площадь каждой боковой грани пирамиды.

Т-15-8.

1. В параллелограмме стороны равны 6 м и 10 м, угол между ними 120° . Найти диагонали параллелограмма.

2. Через сторону AC треугольника ABC , у которого угол A тупой, проведена плоскость P под углом α к плоскости треугольника.

а) Сделать чертеж и на нем указать линейный угол α .

б) Найти расстояние от вершины B до стороны AC и до плоскости P , если $AB = 2$ м и $\angle BAC = 150^\circ$.

1. В правильной четырехугольной (треугольной, шестиугольной) пирамиде боковое ребро наклонено к основанию под углом 60° . Найти с точностью до градуса двугранный угол при боковом ребре.

2. В правильной четырехугольной пирамиде площадь сечения, проходящего через два противоположных боковых ребра, равна Q . Двугранный угол при боковом ребре равен 120° . Найти площадь боковой грани.

3. Боковое ребро в треугольной пирамиде равно a и перпендикулярно противоположной стороне основания, концы его равно отстоят от противоположных им граней, двугранный угол при ребре основания равен 60° . Определить высоту пирамиды.

4. Квадрат $ABCD$ расположен в плоскости Q , наклоненной к плоскости P под углом 60° . Сторона AB образует с плоскостью P угол 30° . Какой угол образует с этой плоскостью сторона AD ?

Тренировочная работа Т-16

Т-16-1.

1. Возможен ли многогранный угол, плоские углы которого равны 150° , 60° , 70° , 80° ?

2. В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $\angle D = \angle C = 90^\circ$, $\angle A$ — острый. Две грани MCB и MCD перпендикулярны плоскости основания.

а) Сделать чертеж и построить линейные углы при ребрах AD и AB .

б) Указать высоты боковых граней.

Т-16-2.

1. Возможен ли многогранный угол, плоские углы которого равны 140° , 50° , 80° , 20° ?

2. В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $\angle C = \angle D = 90^\circ$, $BC < CD$. Две грани (MBA и MBC) перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами α и 5α .

а) Построить чертеж и на нем отметить линейные углы наклона боковых граней к основанию: α и 5α .

б) Найти площадь грани MAD , если $MB = 2$ м, $AD = 5$ м.

Т-16-3.

1. В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольник со сторонами $AB = 2$ м, $AD = 5$ м. Две грани, заключающие стороны прямоугольника AB и BC , перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углами 2α и 3α .

а) Построить чертеж и на нем отметить линейные углы наклона боковых граней к основанию: 2α и 3α .

б) Найти площадь грани MAD , если высота пирамиды равна 4 а.

2. В треугольнике стороны равны: $AB = 13$ м, $BC = 14$ м, $AC = 15$ м; следовательно, p — полупериметр — равен 21 м, а площадь треугольника равна 84 м². Найти: h_a , R — радиус окружности, описанной около этого треугольника, r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Т-16-4.

В трехгранном угле $AA'BC$ треугольной призмы $ABCA'B'C'$ дано: $\angle A'AC = \angle A'AB = \angle BAC = 60^\circ$ и $A'A = 2\sqrt{3}$ м.

а) Найти расстояние от A' до плоскости ABC .

б') Доказать, что в этой призме грань $CC'B'B$ — прямоугольник, если две другие грани призмы — равные ромбы.

Т-16-5.

В трехгранном угле $A'ABD$ четырехугольной призмы $ABCD A'B'C'D'$ дано: $A'A = 2\sqrt{6}$ м, $\angle A'AD = \angle A'AB = 45^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$.

а) Найти расстояние от A' до плоскости ABD .

б') Доказать, что сечения призмы, проходящие через противоположные боковые ребра, одно — перпендикулярно основанию, другое — прямоугольник, если все грани призмы — ромбы.

Т-16-6.

В четырехугольной призме AC' все грани — равные ромбы с углом 60° и стороной $4\sqrt{3}$ м.

а) Найти расстояние от A' до нижнего основания призмы (высоту призмы).

б') Доказать, что сечения, проходящие через противоположные боковые ребра призмы, одно — перпендикулярно основанию, другое — прямоугольник.

Т-16-7.

1. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ в основании равнобедренный прямоугольный треугольник. Грани $AA'C'C$ и $AA'B'B$ — ромбы с углом 60° и стороной $2\sqrt{2}$ м.

а) Найти расстояние от A' до нижнего основания призмы (высоту призмы).

б') Доказать, что $CC'B'B$ — прямоугольник.

2. Возможен ли такой многогранный угол, плоские углы которого равны 50° , 30° , 40° , 60° ?

T-16-8.

1. В трехгранном угле $ABCD$ дано: $\angle BAD = \angle BAC = 60^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ$, $B'B \perp$ пл. ACD . Найти:

а) $\angle CAB'$ (с обоснованием);

б') AB , если $AB' = 4\sqrt{2}$ м.

2. Возможен ли такой многогранный угол, плоские углы которого равны 120° , 130° , 120° ?

Задачи повышенной сложности к работе T-16

1. Доказать, что в многогранном угле один из плоских углов меньше суммы остальных плоских углов.

2. Доказать, что в трехгранном угле против равных плоских углов лежат равные двугранные углы.

3. Плоские углы трехгранного угла — прямые. От вершины его на ребрах отложены равные отрезки и через их концы проведена плоскость. Доказать, что квадрат площади полученного сечения равен сумме квадратов площадей треугольников, отсекаемых на гранях трехгранного угла.

4. В трехгранном угле плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов каждой грани и противолежащие им ребра, пересекаются по одной прямой. Доказать.

Тренировочная работа T-17

T-17-1.

В прямом параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ с высотой, равной $\sqrt{15}$ м, стороны основания равны: $CD = 3$ м, $AD = 5$ м, а угол между этими сторонами 120° . Найти:

а) большую диагональ параллелепипеда;

б') расстояние от $B'B$ до плоскости $CC'A$.

T-17-2.

В прямом параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ с высотой, равной $\sqrt{51}$ м, стороны основания равны: $AB = 8$ м, $AD = 3$ м, $\angle BAD = 60^\circ$. Найти:

а) меньшую диагональ параллелепипеда;

б') расстояние от $C'C$ до плоскости $BB'D$.

Т-17-3.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ диагональ равна 5 м и наклонена к основанию под углом 60° . Ребра основания относятся как 3 : 4. Найти измерения параллелепипеда.

2. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен a . Найти сторону этого треугольника и радиус окружности, описанной около треугольника.

Т-17-4.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ измерения относятся как 3 : 4 : 12, диагональ параллелепипеда равна 26 м. Найти измерения параллелепипеда.

2. Сторона правильного шестиугольника равна a . Найти радиусы окружностей, вписанной в шестиугольник и описанной около шестиугольника, и площадь шестиугольника.

Т-17-5.

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ с высотой, равной $\sqrt{3}$ м, стороны основания равны 5 м и $2\frac{2}{3}$ м, острый угол в основании 60° . Найти:

- а) меньшую диагональ параллелепипеда;
- б') расстояние от $A'A$ до меньшей диагонали параллелепипеда.

2. Сторона правильного треугольника равна a . Найти радиусы окружностей, вписанной в этот треугольник и описанной около треугольника, и площадь треугольника.

Т-17-6.

1. В прямоугольном параллелепипеде измерения равны 5 м, 12 м и $3\sqrt{3}$ м. Найти:

- а) диагональ параллелепипеда;
- б') угол наклона диагонали параллелепипеда к большей боковой грани.

2. Диагональ квадрата равна 4 м. Найти радиусы окружностей, вписанной в квадрат и описанной около квадрата, и площадь квадрата.

Т-17-7.

В прямом параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ с высотой, равной $\sqrt{39}$ м, стороны основания равны $DC = 5$ м, $AD = 16$ м и $\angle ADC = 120^\circ$. Найти:

- а) большую диагональ параллелепипеда;
- б') расстояние от $D'D$ до большей диагонали.

Т-17-8.

1. В прямоугольном параллелепипеде диагонали основания пересекаются под углом 60° , меньшая сторона основания равна 6 м, высота параллелепипеда — 5 м. Найти:

- а) диагональ параллелепипеда;
- б) угол наклона диагонали параллелепипеда к меньшей боковой грани.

2. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен a . Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и сторону треугольника.

Задачи повышенной сложности к работе Т-17

1. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ с ребром, равным 3 м, в точке C' сидит паук, а в точке A — муха. Найти кратчайший путь, по которому паук может добраться до мухи.

2. В правильной треугольной призме все ребра равны 3 м. Найти площадь сечения, проходящего через ребро основания под углом 60° к основанию.

3. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию между любой точкой прямой a и плоскостью, проходящей через прямую b и параллельной прямой a .

4. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ с ребром, равным 2 см, найти:

- а) расстояние между $A'C'$ и DC ;
- б) расстояние между AB и $B'D'$;
- в) расстояние между $A'C'$ и $B'D$.

Тренировочная работа Т-18

Т-18-1.

1. В пирамиде сечение перпендикулярно высоте пирамиды и делит высоту в отношении $3 : 1$, считая от основания высоты. Найти:

а) площадь основания пирамиды, если площадь сечения равна 2 м^2 ;

б) периметр основания, если периметр сечения равен $4\sqrt{2} \text{ м}$.

2. В кубе диагональ равна $2\sqrt{3} \text{ см}$. Найти объем куба.

Т-18-2.

В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площади оснований равны a^2 и $4a^2$. Найти площади:

а) среднего сечения;

б) сечения, параллельного основаниям и делящего высоту в отношении $2 : 3$, считая от меньшего основания.

Т-18-3.

В правильной треугольной усеченной пирамиде площади оснований равны $\sqrt{3}$ м² и $4\sqrt{3}$ м². Найти площади:

- а) среднего сечения;
- б) сечения, параллельного основаниям пирамиды и делящего высоту в отношении 3 : 1, считая от большего основания.

Т-18-4.

1. В пирамиде сечение параллельно основанию и делит высоту в отношении 3 : 7, считая от вершины пирамиды. Найти:

- а) площадь сечения, если площадь основания равна 400 см²;
- б) периметр сечения, если периметр основания равен 80 см.

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна $\sqrt{14}$ м и два измерения: 2 м и 3 м. Найти третье измерение параллелепипеда.

Т-18-5.

1. В параллелограмме стороны равны 3 м и 8 м, угол между ними 60°. Найти диагонали параллелограмма.

2. В пирамиде сечение параллельно основанию и делит высоту пирамиды в отношении 2 : 1, считая от основания высоты. Площадь основания больше площади сечения на 72 см². Найти:

- а) площадь сечения;
- б) периметр сечения, если периметр основания равен 36 см.

Т-18-6.

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ стороны основания равны 2 м и $\sqrt{3}$ м, а угол между ними 30°. Высота параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ м. Найти:

- а) меньшую диагональ параллелепипеда;
- б) расстояние от $C' C$ до меньшей диагонали параллелепипеда.

2. В каком отношении делит высоту пирамиды плоскость, параллельная основанию пирамиды, если площадь сечения в 9 раз меньше площади основания?

Т-18-7.

1. В пирамиде проведено сечение, параллельное основанию и делящее высоту пирамиды в отношении 1 : 5, считая от вершины. Как относится площадь сечения к площади основания?

2. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 м и $2\sqrt{2}$ м, а угол между ними 135° . Высота параллелепипеда $\sqrt{5}$ м.

а) Найти большую диагональ параллелепипеда.

б) Построить угол между этой диагональю и большей боковой гранью параллелепипеда.

Т-18-8.

1. а) В каком отношении делит высоту пирамиды плоскость, параллельная основанию пирамиды, если площадь сечения пирамиды относится к площади основания как 16 : 25?

б) На каком расстоянии от вершины этой пирамиды проходит данное сечение, если высота равна 20 см?

2'. В усеченной пирамиде площадь сечения, параллельного основанию и делящего высоту пирамиды пополам, равна 16 м^2 , а площадь основания 36 м^2 . Найти площадь другого основания.

Задачи повышенной сложности к работе Т-18

1. В усеченной пирамиде параллельно основанию проведено два сечения: площадь одного из них равна среднему арифметическому площадей оснований, т. е. $\frac{q+Q}{2}$, другого — среднему геометрическому площадей оснований — $\sqrt{q \cdot Q}$. Устно установить, какое из этих сечений ближе расположено к меньшему основанию.

2. Площадь среднего сечения пирамиды равна среднему арифметическому двух средних: среднего геометрического и среднего арифметического площадей оснований (q и Q), т. е.

$$\frac{\frac{Q+q}{2} + \sqrt{Q \cdot q}}{2} . \text{ Докажите справедливость этой формулы}$$

в общем виде для какой-нибудь правильной усеченной пирамиды.

3. Допустим, дан многогранник $ABCD A' B' C' D'$, изображенный на рис. 76, где плоскость $A' B' C' D'$ параллельна плоскости $ABCD$:

а) Будут ли многоугольники $ABCD$ и $A' B' C' D'$ подобны?

б) Через середины ребер $A' A$, $B' B$ и $C' C$ проведено сечение. Можно ли найти периметр

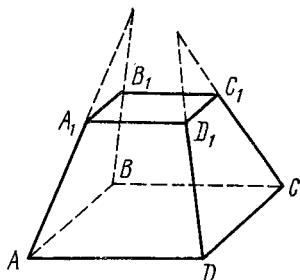


Рис. 76.

этого сечения, если известны периметры $ABCD$ и $A'B'C'D'$?

в) Можно ли найти площадь этого сечения, если известны площади $ABCD$ и $A'B'C'D'$?

4. Высота усеченной пирамиды точкой K разделена в отношении $2 : 3$, считая от меньшего основания. Площадь сечения, параллельного основанию и проходящего через точку K , равна $7,84 \text{ м}^2$. Площадь меньшего основания равна 4 м^2 . Найти площадь среднего сечения этой пирамиды.

Тренировочная работа Т-19

Т-19-1.

В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ — треугольник, в котором $AB = 3 \text{ м}$, $AC = 8 \text{ м}$, $\angle A = 60^\circ$.

1. Найти полную поверхность призмы, если:

а) высота призмы равна $\frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ м}$;

б) высота призмы равна радиусу окружности, описанной около основания призмы.

2'. Отметить на чертеже угол между $B'C$ и плоскостью $A'AC'$.

Т-19-2.

В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ — треугольник, в котором $CB = 3 \text{ м}$, $AC = 5 \text{ м}$ и $\angle C = 120^\circ$.

1. Найти полную поверхность призмы, если:

а) высота призмы равна $\frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ м}$;

б) высота призмы равна радиусу окружности, описанной около основания призмы.

2'. Отметить на чертеже угол между BC' и плоскостью $AA'B'$.

Т-19-3.

В основании прямой призмы $ABCD A'B'C'D'$ — ромб, у которого высота равна 4 м , $\angle A = 30^\circ$.

1. Найти полную поверхность призмы, если:

а) высота призмы равна 2 м ;

б) высота призмы равна радиусу вписанной в ромб окружности.

2'. Отметить на чертеже угол между $D'B$ и плоскостью $B'C'C$.

Т-19-4.

В основании прямой призмы — прямоугольник, у которого диагональ образует со стороной угол 30° . Диагональ приз-

мы равна 12 м и образует с основанием угол, равный 60° . Найти полную поверхность призмы.

Т-19-5.

В основании прямой призмы $ABCD A' B' C' D'$ — ромб с углом $A = 60^\circ$. Меньшая диагональ призмы равна $8\sqrt{2}$ м и наклонена к основанию под углом 45° .

а) Найти полную поверхность призмы.

б) Отметить на чертеже угол между диагональю DB' и плоскостью $AA'D'$.

Т-19-6.

Дана правильная шестиугольная призма, у которой большая диагональ равна $4\sqrt{3}$ м и наклонена к основанию под углом 30° . Найти полную поверхность призмы.

Т-19-7

Дана правильная четырехугольная призма, у которой диагональ равна 4 м и наклонена к основанию под углом 60° .

а) Найти полную поверхность призмы.

б) Отметить на чертеже угол между диагональю боковой грани и плоскостью диагонального сечения.

Т-19-8.

Дана правильная треугольная призма, у которой диагональ боковой грани равна $4\sqrt{3}$ м и наклонена к основанию под углом 30° .

а) Найти полную поверхность призмы.

б) Отметить на чертеже угол между диагональю боковой грани и плоскостью другой боковой грани.

Задачи повышенной сложности к работе Т-19

1. В основании призмы $ABCA' B' C'$ — равносторонний треугольник со стороной, равной $6\sqrt{3}$ м. Боковое ребро равно $2\sqrt{13}$ м. Вершина A' проектируется в центр нижнего основания. Найти полную поверхность призмы.

2. В основании призмы $ABCD A' B' C' D'$ — ромб, у которого высота равна 6 м, угол $A = 60^\circ$. Высота призмы 2 м. Боковое ребро AA' проектируется на прямую AC и наклонено к основанию под углом 45° . Найти полную поверхность призмы.

3. В основании призмы $ABCA' B' C'$ — равнобедренный треугольник с углом A , равным 90° . Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 2 м. Боковое ребро

ро равно $2\sqrt{2}$ м. Вершина A' проектируется в центр описанной окружности. Найти полную поверхность призмы.

4. В основании призмы $ABCA'B'C'$ — равносторонний треугольник; радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 м. Вершина A' проектируется в центр вписанной окружности. AA' образует с плоскостью основания угол 60° . Найти полную поверхность призмы.

Тренировочная работа Т-20

Т-20-1.

1. В правильной треугольной пирамиде ребро основания равно $6\sqrt{3}$ м, а высота пирамиды 4 м. Найти боковую поверхность пирамиды.

2. В основании пирамиды — равнобокая трапеция со сторонами основания 2 м и 8 м. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найти полную поверхность пирамиды.

Т-20-2.

1. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна 13 м, а высота 5 м. Найти боковую поверхность пирамиды.

2. В основании пирамиды — прямоугольный треугольник со сторонами 3 м, 4 м, 5 м. Боковые грани наклонены к основанию под углом 30° . Найти полную поверхность пирамиды.

Т-20-3.

1. В основании пирамиды — треугольник со сторонами 5 м, 12 м, 13 м. Высота пирамиды равна $\sqrt{5}$ м. Найти полную поверхность пирамиды, если боковые грани наклонены к основанию под одним углом.

2. В правильном треугольнике высота равна 6 м. Найти сторону треугольника и радиусы окружностей, вписанной в этот треугольник и описанной около треугольника.

Т-20-4.

1. В основании пирамиды — треугольник со сторонами 5 м, 16 м и углом между этими сторонами, равным 120° . Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найти полную поверхность пирамиды.

2. В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны 4 м и составляют с основанием углы, равные 30° . Найти боковую поверхность пирамиды.

Т-20-5.

1. В правильной треугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, равен 2 м, а боковые

границы наклонены к основанию под углом 30° . Найти боковую поверхность пирамиды.

2. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 2 м, а ребро основания 4 м. Найти боковую поверхность пирамиды.

Т-20-6.

В основании пирамиды $MABC$ — прямоугольный треугольник, в котором $\angle C = 90^\circ$, $a = \sqrt{5}$ м. Две боковые грани MAB и MAC перпендикулярны плоскости основания, грань MCB наклонена к основанию под углом 60° . Высота пирамиды $2\sqrt{3}$ м. Найти боковую поверхность.

Т-20-7.

1. В правильной треугольной пирамиде высота равна $6\sqrt{2}$ м и образует с боковой гранью угол 45° . Найти боковую поверхность пирамиды.

2. В основании пирамиды $MABCD$ — квадрат. Две грани MAB и MAD перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углом 45° . Найти боковую поверхность пирамиды, если высота пирамиды 2 м.

Т-20-8.

В основании пирамиды $MABC$ — треугольник, у которого $a = 13$ м, $b = 15$ м, $c = 14$ м. Грани MAC и MCB перпендикулярны основанию пирамиды, а третья грань наклонена к основанию под углом 45° . Найти полную поверхность пирамиды.

Задачи повышенной сложности к работе Т-20

1. В основании пирамиды — равнобокая трапеция, у которой три стороны равны по 6 м и один угол равен 60° . Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45° . Найти полную поверхность пирамиды.

2. В основании пирамиды $MABCD$ — ромб с углом A , равным 60° . Грани MAB и MAD перпендикулярны основанию пирамиды, а две другие наклонены к основанию под углом 30° . Найти боковую поверхность пирамиды, если высота пирамиды равна 4 м.

3. В основании пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого угол A равен 120° , $a = 6\sqrt{3}$ м. Боковые ребра наклонены к основанию под одним углом. Высота пирамиды 3 м. Найти боковую поверхность пирамиды.

4. В основании пирамиды $MABCDEF$ — правильный шестиугольник. Грани MBC и MBA перпендикулярны ос-

нованию пирамиды. Высота и ребро основания пирамиды равны по 6 см. Найти боковую поверхность пирамиды.

Тренировочная работа Т-21

Т-21-1.

Основанием призмы $ABCA'B'C'$ служит правильный треугольник со стороной 4 м. Боковое ребро равно $\frac{5}{\sqrt{3}}$ м.

Найти объем призмы, если:

- а) боковое ребро наклонено к основанию под углом α ;
- б) A' проектируется в центр треугольника ABC .

Т-21-2.

Основание призмы $ABCD A'B'C'D'$ — квадрат, у которого диагональ равна 2 м. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{5}$ м. Найти объем призмы, если:

- а) боковое ребро составляет с основанием угол α ;
- б) A' проектируется в центр нижнего основания.

Т-21-3.

В основании призмы — равнобедренный треугольник ABC , у которого $\angle A = 120^\circ$, $a = 6$ м, боковое ребро $A'A = 4$ м. Найти объем призмы, если:

- а) боковое ребро перпендикулярно основанию;
- б) A' проектируется в центр окружности, описанной около треугольника ABC .

Т-21-4.

Основание призмы $ABCD A'B'C'D'$ — ромб со стороной $2a$ и углом 2α . Боковое ребро равно b . Найти объем призмы, если:

- а) боковое ребро составляет с основанием угол 60° ;
- б) A' проектируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания.

Т-21-5.

Основание призмы $ABCA'B'C'$ — прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза $AB = 2a$ и $\angle A = 30^\circ$. Боковое ребро равно b . Найти объем призмы, если:

- а) боковое ребро составляет с основанием угол α ;
- б) A' проектируется в центр окружности, описанной около основания призмы.

Т-21-6.

1. Перпендикулярным сечением призмы является ромб с углом α и стороной, равной a . Боковое ребро призмы равно $2a$. Найти объем и боковую поверхность призмы.

2. Радиус окружности, вписанной в правильный треуголь-

ник, равен 3 м. Найти площадь треугольника и длину окружности, описанной около этого треугольника.

Т-21-7.

В основании призмы $ABCD A' B' C' D'$ — прямоугольник, у которого $AC = 4$ м, $\angle BOA = 30^\circ$, где O — точка пересечения диагоналей основания. Боковое ребро равно $\sqrt{13}$ м. Найти объем призмы, если:

а) боковое ребро составляет с основанием угол 60° ;

б) A' проектируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания призмы.

Т-21-8.

Перпендикулярное сечение призмы — треугольник со сторонами 13 м, 37 м и 40 м. Боковое ребро призмы равно 10 м. Найти:

а) боковую поверхность и объем призмы;

б) средний по величине двугранный угол при боковом ребре призмы (с точностью до градуса).

Задачи повышенной сложности к работе Т-21

1. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна 4 м^2 , а расстояние этой грани от противоположного ребра 7 м. Найти объем призмы.

2. Найти объем наклонного параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны 3 м^2 и 4 м^2 . Диагональные сечения образуют угол 30° и пересекаются по прямой, равной 2 м.

3. В основании прямой призмы $ABCA' B' C'$ — равносторонний треугольник. Площадь сечения $BA' C$, наклоненного к основанию под углом 30° , равна 8 м^2 . Найти объем призмы.

4. В правильной четырехугольной призме расстояние между ребром основания и не пересекающей это ребро диагональю призмы равно 2 м. Диагональ боковой грани равна 5 м. Найти объем призмы.

Тренировочная работа Т-22

Т-22-1.

1. В правильной треугольной пирамиде апофема равна a и наклонена к основанию под углом α . Найти объем пирамиды.

2. Найти площадь ромба, если сторона его равна 2 м, а угол 60° .

Т-22-2

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно a и наклонено к основанию под углом α . Найти объем пирамиды.

2. Каждое ребро прямого параллелепипеда равно 3 м, а угол в основании 30° . Найти объем параллелепипеда.

Т-22-3.

В основании пирамиды — прямоугольник со сторонами 4 м и 2 м. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углами 60° и α ($\alpha > 60^\circ$). Найти:

а) объем пирамиды;

б) площадь грани, наклоненной к основанию под углом 60° .

Т-22-4.

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° , ребро основания равно $2a$. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

2. В основании пирамиды $МABC$ — равнобедренный треугольник ABC , у которого $AC = BC$, $AB = a$, $\angle C = \alpha$. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды. MC составляет с основанием пирамиды угол α . Найти высоту пирамиды.

Т-22-5.

1. В основании пирамиды — ромб со стороной $2a$ и острым углом α . Двугранные углы при ребрах основания пирамиды содержат по 60° . Найти объем пирамиды.

2. Найти площадь равнобедренного треугольника ABC , у которого $AC = BC$, $\angle C = \alpha$, $AB = a$.

Т-22-6.

1. В основании пирамиды — равнобедренная трапеция с боковой стороной a и углом 60° . Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти объем пирамиды.

2. В наклонной призме проекция бокового ребра на основание равна высоте призмы. Найти высоту призмы, если боковое ребро равно a .

Т-22-7.

1. В основании пирамиды — прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна $2a$ и острый угол равен α . Боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Найти объем пирамиды.

2. Найти площадь треугольника и радиус окружности, описанной около этого треугольника, если стороны его равны 13 м, 37 м и 40 м.

Т-22-8.

1. В основании пирамиды $МABC$ — прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $a = 3$ м.

Две боковые грани $МAB$ и MAC перпендикулярны основанию, а грань $МСВ$ наклонена к основанию под углом α . Найти:

- а) объем пирамиды;
- б) площадь грани $МBC$.

2. Стороны треугольника равны 7 м, 24 м и 25 м. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Задачи повышенной сложности к работе Т-22

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра равны a и двугранные углы при боковых ребрах 120° . Найти объем пирамиды.

2. Объем треугольной пирамиды $МABC$ равен 80 м^3 . Боковая грань $МBC$ — треугольник со сторонами 9 м, 40 м и 41 м. Найти расстояние от вершины A до плоскости боковой грани $МBC$.

3. Площади двух боковых граней треугольной пирамиды равны 9 м^2 и 16 м^2 и их общее ребро 4 м. Двугранный угол между двумя данными гранями равен 30° . Найти объем пирамиды.

4. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит боковую поверхность пирамиды пополам. В каком отношении делится этой плоскостью объем пирамиды?

5. Объем усеченной пирамиды равен, как известно, сумме объемов трех полных пирамид, одна из которых имеет основание, равное $\sqrt{B \cdot b}$, где B и b — площади оснований усеченной пирамиды. Сечение, параллельное основаниям данной пирамиды и равное $\sqrt{B \cdot b}$, находится ближе к меньшему или большему основанию? В каком отношении это сечение делит высоту усеченной пирамиды?

Тренировочная работа Т-23

Т-23-1.

Найти поверхность и объем правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно 3 м.

Т-23-2.

Найти поверхность и объем правильного октаэдра, если ребро октаэдра равно 2 м.

Т-23-3.

Найти площадь поверхности и объем правильного тетраэдра, если высота грани тетраэдра равна 3 м.

Т-23-4.

Найти площадь поверхности и объем правильного октаэдра, если высота грани октаэдра равна 2 м.

Т-23-5.

Найти ребро и объем тетраэдра, если площадь грани тетраэдра равна $\sqrt{3} \text{ м}^2$.

Т-23-6.

Найти ребро и объем октаэдра, если площадь грани октаэдра равна $\frac{9}{4} \sqrt{3} \text{ м}^2$.

Т-23-7.

Расстояние от вершины до грани в правильном тетраэдре равно $\sqrt{32} \text{ м}$. Найти объем и площадь поверхности тетраэдра.

Т-23-8.

Расстояние противоположных вершин октаэдра равно $2\sqrt{6} \text{ м}$. Найти объем и поверхность октаэдра.

Задачи повышенной сложности к работе Т-23

1. В правильном тетраэдре отрезки, соединяющие вершины с центрами противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 1 : 3. Доказать.

2. Найти угол между отрезками, соединяющими середину высоты правильного тетраэдра с двумя вершинами основания.

3. Найти отношение: а) поверхностей; б) объемов правильного тетраэдра и многогранника, ребрами которого служат отрезки, соединяющие попарно середины ребер данного тетраэдра.

4. Найти: а) поверхность; б) объем многогранника, ребрами которого служат отрезки, соединяющие попарно центры граней данного октаэдра, если ребро октаэдра равно a .

Тренировочная работа Т-24

Т-24-1.

В конусе образующая, равная $2\sqrt{2} \text{ м}$, наклонена к основанию под углом 45° . Через две образующие проведена плоскость, составляющая с высотой конуса угол 30° . Найти:

а) расстояние от основания высоты до хорды, по которой плоскость сечения пересекает основание конуса;

б) расстояние от основания высоты до плоскости сечения.

Т-24-2.

В конусе образующая наклонена к основанию под углом 30° . Радиус основания конуса 6 м. Через две образующие конуса, составляющие между собой угол 90° , проведена плоскость. Найти:

а) длину хорды, по которой плоскость сечения пересекает основание конуса;

б) расстояние от основания высоты конуса до хорды.

Т-24-3.

В конусе через две образующие, составляющие между собой угол 2β , проведена плоскость, образующая с основанием угол α . Высота конуса равна a . Найти:

а) расстояние от основания высоты конуса до плоскости сечения;

б) образующую конуса.

Т-24-4.

В конусе через две образующие MA и MB , составляющие между собой угол 90° , проведено сечение. Хорда AB отсекает третью часть окружности основания. Радиус основания равен $2a$. Найти:

а) расстояние от основания высоты конуса до хорды AB ;

б) образующую конуса.

Т-24-5.

Образующая конуса равна a и наклонена к основанию под углом α . Высота конуса в 2 раза больше высоты вписанного в конус цилиндра.

а) Выполнить чертеж.

б) Провести сечение через высоту и образующую конуса.

в) Найти радиус основания цилиндра.

Т-24-6.

Высота конуса равна 4 м, а высота вписанного в него цилиндра 3 м. Образующая конуса равна 5 м.

а) Выполнить чертеж.

б) Провести сечение через высоту и образующую конуса.

в) Найти радиус основания цилиндра.

Т-24-7.

Через две образующие конуса MA и MB проведена плоскость. Хорда $AB = 2$ м, $\angle AOB = 90^\circ$. Высота конуса равна $\sqrt{6}$ м. Найти:

а) образующую конуса;

б) угол наклона образующей конуса к основанию.

Т-24-8.

Образующая конуса наклонена к основанию под углом α , а образующая и радиус основания цилиндра, вписанного в конус, равны соответственно 3 м и 2 м.

а) Выполнить чертеж.

б) Провести сечение через высоту и образующую конуса.

в) Найти образующую конуса.

1. Два конуса расположены так, что вершина одного находится в центре основания другого. Наибольший угол между образующими первого конуса равен 60° , второго — 90° . Найти длину кривой, по которой эти конусы пересекаются, если высота конуса равна 3 м.

2. Основания двух конусов расположены в одной плоскости. Образующая первого конуса наклонена к основанию под углом 2α , а второго — под углом α . Высота первого конуса равна 2 м. Вершина второго конуса лежит на середине высоты первого конуса. Найти длину кривой, по которой пересекаются боковые поверхности конусов.

3. Через две образующие конуса AM и BM проведено сечение. Перпендикуляр OK , проведенный из центра O основания конуса к плоскости MAV , делит точкой K отрезок MK (C лежит на AB) на два отрезка: $KC = 1$ м и $KM = 3$ м. Радиус основания конуса равен $\sqrt{13}$ м. Найти:

а) образующую конуса;

б) хорду AB .

4. В конусе, у которого угол между образующей и высотой равен $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$, проведено сечение через две образующие так, что угол между высотой конуса и плоскостью сечения равен углу между образующими в сечении. Доказать, что в этом случае угол в сечении между образующими равен 60° .

Тренировочная работа Т-25

Т-25-1.

В цилиндр вписана треугольная пирамида, в основании которой — правильный треугольник ABC , две грани MAV и MAC перпендикулярны основанию, а третья составляет с плоскостью основания угол α . Высота пирамиды равна a . Найти объем и боковую поверхность цилиндра и объем пирамиды.

Т-25-2.

В цилиндр вписана призма, в основании которой — равнобедренный треугольник ABC , у которого $A = \alpha$, основание $BC = 2a$. Высота цилиндра равна b . Найти объем и боковую поверхность цилиндра и объем призмы.

Т-25-3.

В цилиндр вписана призма, в основании которой — треугольник ABC , у которого $C = 90^\circ$, $A = 30^\circ$, $a = 2$ м. Диа-

гональ грани, содержащей катет a , наклонена к основанию под углом 45° . Найти объем и боковую поверхность цилиндра и объем призмы.

Т-25-4.

В цилиндр вписана прямая призма, в основании которой — треугольник ABC , у которого $AB = a$, $AC = 2a$, $A = 120^\circ$. Диагональ осевого сечения цилиндра составляет с основанием угол α . Найти объем и боковую поверхность цилиндра и объем призмы.

Т-25-5.

В цилиндр вписан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$. Диагонали основания параллелепипеда пересекаются под острым углом 2α . $\angle BDB' = \alpha$. Меньшее ребро основания параллелепипеда равно $2a$. Найти объем и боковую поверхность цилиндра.

Т-25-6.

В цилиндр вписана треугольная пирамида $MABC$. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$. Грани пирамиды MBC и MAB перпендикулярны основанию, а грань MAC наклонена к основанию под углом α . $MC = 2a$. Найти объем и боковую поверхность цилиндра.

Т-25-7.

В цилиндр вписана прямая призма, в основании которой равнобокая трапеция с углом 120° и тремя сторонами, каждая из которых равна 3 м. Найти объем и боковую поверхность цилиндра и объем призмы, если высота призмы равна радиусу основания цилиндра.

Т-25-8.

В цилиндр вписана шестиугольная пирамида $MABCDEF$. Две грани MED и MDC перпендикулярны основанию пирамиды, высота пирамиды равна a . Грань AFM наклонена к основанию под углом α . Найти объем и боковую поверхность цилиндра.

Задачи повышенной сложности к работе Т-25

1. Цилиндр и правильная треугольная пирамида расположены так, что окружность нижнего основания цилиндра вписана в основание пирамиды, а окружность верхнего основания цилиндра пересекает боковые ребра пирамиды. Найти отношение объема цилиндра к объему пирамиды.

2. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ цилиндр расположен так, что каждое из его оснований касается трех граней: одно — сходящихся в вершине B' , другое — сходящихся в вершине

D ; ось цилиндра лежит на $B'D$. Радиус основания цилиндра 1 м, длина ребра куба $2\sqrt{6}$ м. Найти объем цилиндра.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ расположен цилиндр так, что его основания касаются трех граней: одно — сходящихся в вершине B , другое — сходящихся в вершине D ; образующая лежит на прямой BD . Высота пирамиды 16 м, боковое ребро 20 м, радиус основания цилиндра 3 м. Найти объем цилиндра.

4. В правильной треугольной пирамиде $MABC$, у которой высота равна 8 м, а сторона основания 18 м, расположен цилиндр так, что одно его основание касается трех граней пирамиды, сходящихся в вершине A , другое — двух граней с общим ребром BC , а образующая расположена на высоте основания пирамиды. Найти объем цилиндра, если радиус его основания равен 1,5 м.

Тренировочная работа Т-26

Т-26-1.

1. В конусе образующая равна a и наклонена к основанию под углом α . Найти:

- площадь боковой поверхности и объем конуса;
- угол в развертке боковой поверхности конуса.

2. Устно. В правильном треугольнике радиус вписанной окружности равен a . Найти радиус описанной окружности, сторону треугольника, площадь треугольника.

Т-26-2.

1. В конусе образующая наклонена к основанию под углом α . Высота конуса равна a . Найти:

- площадь боковой поверхности и объем конуса;
- угол в развертке боковой поверхности конуса.

2. Устно. В правильном шестиугольнике радиус вписанной окружности равен a . Найти радиус описанной окружности, сторону шестиугольника и площадь шестиугольника.

Т-26-3.

1. В конусе угол между высотой и образующей равен α . Радиус основания конуса равен a . Найти:

- площадь боковой поверхности и объем конуса;
- угол в боковой развертке конуса.

2. Устно. В треугольнике дана сторона a и противолежащий угол α . Найти радиус описанной окружности.

Т-26-4.

1. В конус вписана пирамида $MABC$, в основании которой — треугольник ABC , в котором $A = \alpha$, $BC = a$. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α . Найти:

- а) объем конуса и площадь боковой поверхности;
- б') угол в развертке боковой поверхности конуса.

2. В треугольнике даны две стороны a и b и угол между ними α . Найти:

- а) площадь треугольника;
- б') третью сторону треугольника.

Т-26-5.

В конус вписана правильная треугольная пирамида, боковая грань которой наклонена к основанию под углом α ; высота конуса равна a . Найти:

- а) площадь боковой поверхности и объем конуса;
- б') объем пирамиды.

Т-26-6.

В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, боковая грань которой наклонена к основанию под углом α . Высота конуса равна a . Найти:

- а) площадь боковой поверхности и объем конуса;
- б') объем пирамиды.

Т-26-7.

В усеченный конус вписана правильная треугольная усеченная пирамида с ребрами основания a и $2a$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Найти:

- а) площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса;
- б') объем усеченной пирамиды.

Т-26-8.

В усеченный конус вписана правильная четырехугольная усеченная пирамида с ребрами основания a и $3a$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Найти:

- а) площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса;
- б') объем усеченной пирамиды.

Задачи повышенной сложности к работе Т-26

1. В конус вписана правильная треугольная пирамида, у которой боковые грани наклонены к основанию под углом α . Образующая конуса равна a . Найти объем и боковую поверхность конуса.

2. В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Найти объем и боковую поверхность конуса, если апофема пирамиды равна a .

3. В осевом сечении конуса угол 120° . Наибольшая площадь сечения, проведенного через две образующие, равна 2 м^2 . Найти объем и боковую поверхность конуса.

4. Развертка боковой поверхности конуса — сектор с углом 60° . В этот сектор вписан круг радиусом 1 м . Найти объем и боковую поверхность конуса.

5. Доказать для какого-нибудь частного случая, что угол в развертке боковой поверхности конуса больше, чем угол в осевом сечении этого конуса.

6. Доказать для какого-нибудь частного случая, что угол в развертке боковой поверхности конуса более чем в два раза больше угла в осевом сечении этого конуса.

Тренировочная работа Т-27

Т-27-1.

1. Из точки A проведены к окружности с центром O секущая $АОМ$, равная 12 м , и касательная, равная $4\sqrt{3} \text{ м}$. Найти радиус окружности.

2. Шар пересечен плоскостью на расстоянии 2 м от центра. Площадь сечения $5\pi \text{ м}^2$. Найти радиус шара.

Т-27-2.

1. В круге проведены две хорды: CD и AB ; $CD \perp AB$, точка K — пересечение хорд. $CK = KD = 2\sqrt{2} \text{ м}$, $AK : KB = 1 : 8$. Найти радиус окружности.

2. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом α к радиусу. Расстояние от плоскости до центра шара равно 2 м . Найти площадь сечения и радиус шара.

Т-27-3.

1. В круге через конец радиуса проведена хорда под углом α к радиусу. Найти длину хорды, если радиус равен a .

2. Сечение, перпендикулярное диаметру шара, разделило диаметр AB в отношении $3 : 5$. Большая хорда, соединяющая один из концов диаметра AB с точкой окружности сечения, равна $2a\sqrt{10}$. Найти радиус шара.

Т-27-4.

1. В круге проведены диаметр AB и перпендикулярная ему хорда CD , K — точка их пересечения. $AK = 5 \text{ м}$, $KB = 7 \text{ м}$. Найти AD и DB .

2. К шару радиусом OM проведена касательная плоскость, на которой находится отрезок MD , равный $\sqrt{65} \text{ м}$. Из точки D проведена секущая $ДОК$, равная 13 м . Найти радиус шара.

Т-27-5.

1. К шару радиусом OD проведена касательная плоскость,

на которой находится отрезок DK , равный $4\sqrt{15}$ м. Из точки K проведена секущая через центр шара, равная пяти радиусам шара. Найти радиус шара.

2'. Касательные к окружности, проведенные из одной точки, образуют угол 120° . Меньшая дуга окружности, заключенная между точками касания, равна π м. Найти радиус окружности.

T-27-6.

1. Шар пересечен плоскостью на расстоянии 4 см от центра. Площадь сечения равна 20π см². Найти радиус шара.

2'. Из точки M к окружности проведена касательная AM , равная $2\sqrt{3}$ м, и секущая AB под углом 30° к касательной, пересекающая диаметр EM в точке F так, что $MF : FE = 1 : 5$. Найти:

а) радиус окружности;

б) (н. о.) расстояние от центра до секущей AB .

T-27-7.

1. Две плоскости P и Q пересекаются под углом 2α и пересекают шар так, что каждая из них находится от центра шара на одинаковом расстоянии. Радиусы сечений равны a , а расстояние от центра шара до прямой, по которой пересекаются плоскости P и Q , равно $3a$. Найти радиус шара.

2'. К окружности радиусом $\sqrt{13}$ м из одной точки A проведены касательная AB и секущая AMC . $AM = 4$ м, $MC = 5$ м. Найти:

а) расстояние от точки A до центра окружности;

б) расстояние от центра окружности до секущей AMC .

T-27-8.

1'. На шар надет проволоочный квадрат, сторона которого равна 6 м. Плоскость квадрата удалена от центра шара на расстояние 4 м. Найти радиус шара.

2. В окружности проведены две хорды AB и AC под углом 120° . Эти хорды удалены от центра круга на 3 см. Найти радиус круга и длину хорд.

Задачи повышенной сложности к работе T-27

1. Если через две точки A и B , лежащие на поверхности шара и не принадлежащие концам одного диаметра, провести два сечения: одно через центр шара, а другое перпендикулярно первому сечению, то меньшая дуга AB , лежащая на окружности первого сечения, будет меньше дуги AB , лежащей на окружности второго сечения. Доказать.

2. Плоскость P касается шара в точке M , а плоскость Q пересекается с плоскостью P под углом α и пересекает диаметр AM шара в точке K так, что $AK:KM = 3:1$. Найти радиус шара и расстояние от центра шара до плоскости сечения, если расстояние от K до линии пересечения плоскостей P и Q равно $2a$.

3. Через точку, лежащую на поверхности шара, проведены две плоскости, угол между которыми равен 120° , а расстояния их от центра равны одно 11 дм, другое 13 дм. Найти радиус шара и площади сечений.

Тренировочная работа Т-28

Т-28-1.

Хорда $AM = 2a$ (рис. 77).

1. Найти объем и поверхность шара радиуса OA .

2. Вращая вокруг диаметра MK сектор MOA , найти объем тела вращения.

3'. Вращая вокруг MK хорду AM , найти площадь поверхности, описываемой хордой AM .

4'. Вращая вокруг MK треугольник AOM , найти объем тела вращения.

Т-28-2.

1. Шар пересечен плоскостью перпендикулярно его диаметру AB , которая разделила AB на два отрезка—4 м и 6 м. Найти:

а) объем шара;

б') поверхность большего шарового сегмента;

в') объем шарового сектора, содержащего большую сегментную поверхность.

2. Из точки B проведена касательная AB и секущая BCD , у которой $CB = 4$ м, $CD = 6$ м. Найти AB .

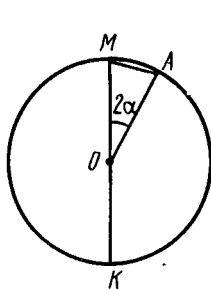


Рис. 77.

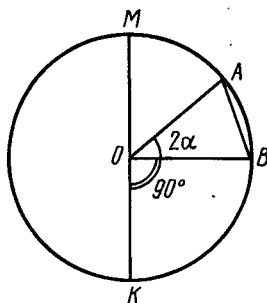


Рис. 78.

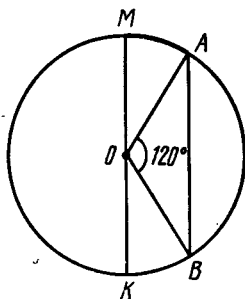


Рис. 79.

Т-28-3.

Хорда $AB = 2a$ (рис. 78).

1. Найти объем и поверхность шара радиуса OA .
2. Вращая вокруг диаметра MK сектор OAB , найти объем тела вращения.
- 3'. Вращая вокруг MK хорду AB , найти площадь поверхности, описываемой хордой AB .
- 4'. Вращая вокруг MK треугольник OAB , найти объем тела вращения.

Т-28-4.

Шар пересечен плоскостью перпендикулярно его диаметру AB , которая разделила диаметр AB точкой K в отношении $AK : KB = 1 : 3$. Площадь сечения равна 12π м². Найти:

- а) объем шара;
- б') объем шарового сектора, содержащего меньшую сегментную поверхность;
- в') поверхность меньшего шарового сегмента,

Т-28-5.

$AB \parallel KM$, $R = a\sqrt{3}$ (рис. 79).

1. Найти объем и поверхность шара радиуса OA .
2. Вращая вокруг MK сектор OAB , найти объем тела вращения.
3. Вращая вокруг MK хорду AB , найти площадь поверхности, описываемой хордой AB .
- 4'. Вращая вокруг MK треугольник OAB , найти объем тела вращения.

Т-28-6.

Шар пересечен плоскостью, проходящей через конец B радиуса OB под углом 30° к нему. Площадь сечения равна 3π м². Найти:

- а) объем шара;
- б') поверхность большего шарового сегмента;
- в') объем шарового сектора, содержащего меньшую сегментную поверхность.

Т-28-7.

Хорда $AB = 2a\sqrt{2}$ (рис. 80).

1. Найти поверхность и объем шара радиуса OA .
2. Вращая вокруг MK сектор OAB , найти объем тела вращения.
- 3'. Вращая вокруг MK хорду

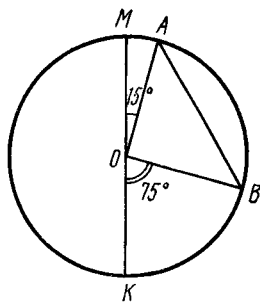


Рис. 80.

AB , найти площадь поверхности, описываемой хордой AB .

4'. Вращая вокруг MK треугольник OAB , найти объем тела вращения.

T-28-8.

К шару радиусом OM проведена касательная плоскость P , на которой находится отрезок ME , равный $\sqrt{3}$ м. Через точку E и середину OM проведена плоскость β , составляющая угол 60° с плоскостью P . Найти.

а) объем и поверхность шара;

б) поверхность меньшего шарового сегмента, отсеченного плоскостью β ;

в) объем шарового сектора, содержащего меньшую сегментную поверхность.

Задачи повышенной сложности к работе T-28

1. Шар пересечен плоскостью, перпендикулярной диаметру AB и находящейся от центра на расстоянии a . Найти объем и поверхность шара, если прямая, соединяющая A с точкой окружности сечения, образует с плоскостью угол α .

2. Доказать, что центр шара, вписанного в пирамиду, у которой боковые грани наклонены под одним углом к основанию, лежит на высоте пирамиды.

3. Шар касается боковых граней правильной треугольной пирамиды, и центр его находится от основания пирамиды на расстоянии, равном m . Радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, равен m , а боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом α . Найти объем шара.

4. Если два шара касаются, то точки касания лежат на их линии центров. Доказать.

5. Два шара касаются друг друга. Радиус одного в 2 раза больше другого. Прямая, касательная к шарам, касается сфер шаров в точках A и B . $AB = 4\sqrt{2}$ м. Найти поверхности шаров.

6. Два равных шара пересекаются так, что центр одного лежит на поверхности другого. Наименьшая площадь, которая может получиться от пересечения одного шара плоскостью, касающейся поверхности другого шара, находящейся внутри первого шара, равна 12π м². Найти поверхности шаров.

Тренировочная работа T-29

T-29-1.

В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, боковые ребра которой наклонены к основанию под углом α , а высота пирамиды равна 2 с. Найти:

- а) площадь поверхности шара;
- б) объем пирамиды.

Т-29-2.

В правильную четырехугольную пирамиду, апофема которой равна a и наклонена к основанию под углом 2α , вписан шар. Найти:

- а) объем шара;
- б) объем пирамиды.

Т-29-3.

В шар вписана правильная треугольная пирамида, боковые ребра которой наклонены к основанию под углом α и высота основания пирамиды равна $3\sqrt{3}$ м. Найти:

- а) поверхность шара;
- б) объем пирамиды.

Т-29-4.

В правильную треугольную пирамиду, у которой ребро основания равно $6\sqrt{3}$ м, вписан шар. Боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 2β . Найти:

- а) объем и поверхность шара;
- б) боковую поверхность пирамиды.

Т-29-5.

В шар вписана пирамида, в основании которой — треугольник ABC : $C = 90^\circ$, $A = \alpha$, $BC = 2a$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти:

- а) объем шара;
- б) объем пирамиды.

Т-29-6.

В пирамиду, у которой боковые грани наклонены к основанию под углом 2β , вписан шар. В основании пирамиды — прямоугольный треугольник со сторонами 3 м, 4 м и 5 м. Найти:

- а) поверхность шара;
- б) боковую поверхность пирамиды и объем пирамиды.

Т-29-7.

В шар вписана треугольная призма, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом 120° и противолежащей этому углу стороной, равной $4\sqrt{3}$ м. Высота призмы 6 м. Найти:

- а) объем шара;
- б) объем призмы.

Т-29-8.

В шар вписана призма, в основании которой — трапеция,

у которой три стороны по 3 м, а угол 60° . Высота призмы 8 м. Найти:

- а) поверхность шара;
- б) объем призмы.

Задачи повышенной сложности к работе Т-29

1. В основании пирамиды — прямоугольная трапеция, у которой угол 30° и большая боковая сторона равна 8 м. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Найти поверхность вписанного в пирамиду шара.

2. Если в многогранник можно вписать шар, то объем многогранника равен $\frac{r}{3} S_{\text{мн}}$, где $S_{\text{мн}}$ — полная поверхность многогранника, r — радиус вписанного в многогранник шара. Доказать.

3. Найти полную поверхность многогранника, если $V_{\text{шара}} = \frac{4\pi \sqrt{3}}{27} \text{ м}^3$, а V многогранника, описанного около этого шара, равен $2\sqrt{3} \text{ м}^3$.

4. В правильную четырехугольную пирамиду вписано 12 шаров так, что первый шар касается основания и боковых граней пирамиды, а каждый последующий касается предыдущего шара и боковых граней пирамиды. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 2α , и ребро основания пирамиды равно $2a$. Найти поверхность двенадцатого шара, вписанного в пирамиду.

5. Ребро правильного тетраэдра равно $2a\sqrt{2}$. Найти объем шара, поверхность которого касается всех ребер тетраэдра.

6. В основании пирамиды $MABC$ — треугольник ABC , в котором $AB = AC = a$, $A = 2\alpha$. Две грани MAB и MAC перпендикулярны основанию, а третья наклонена к основанию под углом 2α . Найти объем вписанного в пирамиду шара.

Тренировочная работа Т-30

Т-30-1.

В треугольнике ABC дано: $c \approx \sqrt{2}, 0$, $b \approx 3,0$, $A \approx 45^\circ$. Найти: a , S_{Δ} , C и B (с точностью до градуса), R .

Т-30-2.

В треугольнике ABC дано: $b \approx 4,0$, $A \approx 45^\circ$, $C \approx 18^\circ$. Найти: a , c , S_{Δ} , r .

Т-30-3.

В треугольнике ABC дано: $a \approx 16$, $b \approx 19$, $c \approx 5,0$.
Найти: A , B , C (с точностью до градуса), S_{Δ} , R , r .

Т-30-4.

В треугольнике ABC дано: $B \approx 120^\circ$, $c \approx 6,0$, $a \approx 10$.
Найти: A и C (с точностью до градуса), S_{Δ} , R , r , b .

Т-30-5.

В шар вписана пирамида, у которой боковые ребра наклонены к основанию под углом 65° . В основании пирамиды — треугольник ABC , в котором $a \approx 5,0$, $b \approx 16$, $C \approx 120^\circ$.
Найти:

а) радиус окружности, описанной около основания пирамиды;

б) радиус шара.

Т-30-6.

В пирамиду, у которой боковые грани наклонены к основанию под углом 74° , вписан шар. В основании пирамиды — треугольник ABC со сторонами 13, 37 и 40. Найти:

а) поверхность шара;

б') меньший угол в треугольнике ABC (с точностью до градуса).

Т-30-7.

В шар вписана пирамида, в основании которой трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BD = 4,8$, $A = 37^\circ$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 70° . Найти объем шара.

Т-30-8.

В пирамиду, в основании которой ромб с углом 36° и стороной 2,4, вписан шар. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 58° . Найти объем шара.

Задачи повышенной сложности к работе Т-30

1. Доказать, что треугольник равнобедренный, если

$$\text{а) } \sin A = 2 \sin B \cdot \cos C;$$

$$\text{б) } a = 2b \sin \frac{A}{2};$$

$$\text{в) } \frac{b}{\cos \frac{A}{2}} = 2R;$$

$$\text{г) } a \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 2r.$$

2. Доказать, что треугольник равносторонний, если в нем

$$\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2 \quad \text{и} \quad \sin A \cdot \sin B = \frac{3}{4}.$$

3. Доказать, что треугольник прямоугольный или равнобедренный, если $\sin(A + B) \cdot \cos C = \sin(A + C) \cdot \cos B$.

4. Доказать, что в треугольнике:

$$\text{а) } a + b = 4R \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2};$$

$$\text{б) } \sin A + \sin B > \sin C.$$

Тренировочная работа Т-31

Т-31-1.

Равносторонний треугольник ABC расположен над плоскостью так, что вершины A и B удалены от этой плоскости на расстояния, соответственно равные 2 м и 4 м. Проекция стороны AB на плоскость равна $4\sqrt{2}$ м. Найти:

- а) стороны треугольника ABC ;
- б) расстояние от середины стороны AB до плоскости;
- в) расстояние от центра треугольника до плоскости, если вершина C удалена от плоскости на 5 м.

Т-31-2.

Прямоугольный треугольник ABC , в котором $C = 90^\circ$, $AC = 10$ м, расположен над плоскостью так, что вершина A удалена от этой плоскости на 4 м. Проекция AC на плоскость равна 8 м. Найти:

- а) расстояние от вершины C до плоскости;
- б) расстояние от середины AC до плоскости;
- в) расстояние центра описанной около треугольника окружности до плоскости, если вершина B удалена от плоскости на 12 м.

Т-31-3.

Треугольник ABC , у которого $AB = 5$ см, расположен над плоскостью так, что вершины A , B и C удалены от плоскости соответственно на расстояния 10 см, 14 см и 4 см. Найти:

- а) расстояние от середины стороны AB до плоскости;
- б) проекцию AB на плоскость;
- в) расстояние от точки пересечения медиан треугольника ABC до плоскости.

Т-31-4.

Ромб $ABCD$ расположен над плоскостью так, что вершины B , C и D от плоскости удалены соответственно на расстояния 20 см, 21 см и 18 см. Проекция отрезка BC на плоскость равна $\sqrt{15}$ см. Найти:

- а) расстояние от середины отрезка BC до плоскости;
- б) периметр ромба;
- в) расстояние от точки A до плоскости.

Т-31-5.

Через сторону AD ромба $ABCD$ проходит плоскость P под углом α к плоскости ромба. BC удалена от плоскости P на расстояние, равное a . Найти:

- а) высоту ромба;
- б) длину вписанной в ромб окружности;
- в) площадь ромба, если угол ромба равен β .

Т-31-6.

Через сторону AC равностороннего треугольника ABC к его плоскости под углом 45° проведена плоскость P . Расстояние от точки B до плоскости равно $3\sqrt{2}$ м. Найти:

- а) высоту треугольника;
- б) площадь круга, вписанного в этот треугольник;
- в) угол между AB и плоскостью P .

Т-31-7.

Квадрат $ABCD$ расположен над плоскостью, и его две вершины A и C удалены от этой плоскости соответственно на 6 м и 10 м, а проекция AC на плоскость равна $\sqrt{20}$ м.

а) Найти расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до плоскости.

б) Найти длину окружности, описанной около квадрата.

в) Определить, будут ли проекции диагоналей AC и BD на плоскость перпендикулярны, если расстояние от вершины B до плоскости равно 8 м?

Т-31-8.

Правильный шестиугольник $ABCDEF$ расположен над плоскостью так, что точки A и D удалены от плоскости на расстояния, соответственно равные 8 м и 10 м. Проекция диагонали AD на плоскость равна $\sqrt{12}$ м. Найти:

а) расстояние точки пересечения диагоналей AD и BE от плоскости;

б) площадь круга, описанного около шестиугольника;

в) расстояние точек C и E до плоскости, если они находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

1. Равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 6 м, расположен над плоскостью так, что вершины A и B удалены от этой плоскости соответственно на 2 м и 4 м. На каком наибольшем расстоянии от плоскости может находиться вершина C ?

2. Постройте произвольный треугольник ABC , вершины которого находятся на разных расстояниях от данной плоскости, при этом вершины B и C — по одну сторону от данной плоскости, а вершина A — по другую. Постройте линию пересечения данной плоскости с плоскостью треугольника.

3. Ромб $ABCD$ расположен так, что вершины A , B и C удалены от плоскости соответственно на 3 см, 17 см и 1 см. На каком расстоянии находится вершина D от плоскости?

4. Доказать, что точка касания окружностей, которые касаются друг друга, лежит на линии их центров.

5. В круг радиусом 1 м вписаны три равных круга так, что каждый из них касается двух других и большего круга. Найти длины окружностей равных кругов.

Тренировочная работа Т-32

Т-32-1.

В основании пирамиды $MABC$ — треугольник ABC , в котором $A = \alpha$, $BC = 2a$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти:

а) объем и боковую поверхность конуса, описанного около пирамиды;

б) площадь сечения конуса, проведенного перпендикулярно высоте конуса через точку, делящую высоту в отношении 1 : 3, считая от вершины конуса.

Т-32-2.

В основании пирамиды $MABC$ — равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC$, $B = 2\alpha$, $CB = 2a$. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти:

а) объем и боковую поверхность конуса, вписанного в пирамиду;

б) площадь сечения конуса, проведенного перпендикулярно высоте конуса и делящего высоту в отношении 1 : 4, считая от вершины конуса.

Т-32-3.

В основаниях усеченной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$, в которых

$A'B' = A'C' = a\sqrt{2}$, $AB = AC = 2a\sqrt{2}$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти объем и боковую поверхность усеченного конуса, описанного около пирамиды.

Т-32-4.

В основаниях усеченной пирамиды, боковые грани которой наклонены к основанию под углом α , — ромбы $ABCD$ и $A'B'C'D'$, в которых $A = A' = \alpha$, $AB = 4a$, $A'B' = 2a$. Найти объем и боковую поверхность усеченного конуса, вписанного в пирамиду.

Т-32-5.

В основании пирамиды — прямоугольный треугольник $ABC : C = 90^\circ$, $A = \alpha$, $BC = 2a$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Найти объем и боковую поверхность конуса, описанного около пирамиды.

Т-32-6.

В основании пирамиды — треугольник со сторонами 5 м, 12 м и 13 м. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти объемы и боковые поверхности пирамиды и вписанного в пирамиду конуса.

Т-32-7.

В правильную треугольную пирамиду с двугранным углом при ребре основания, равным α , вписан конус с радиусом основания a . Найти объемы пирамиды и конуса и площадь сечения пирамиды, если сечение проведено перпендикулярно высоте пирамиды и делит высоту в отношении 4 : 5, считая от вершины пирамиды.

Т-32-8.

Правильная треугольная пирамида с высотой a вписана в конус. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом α . Найти объемы пирамиды и конуса, площадь сечения пирамиды, если сечение проведено параллельно основанию и делит высоту пирамиды в отношении 3 : 5, считая от вершины пирамиды.

Задачи повышенной сложности к работе Т-32

1. В правильную треугольную пирамиду вписана правильная треугольная призма с равными ребрами так, что нижнее основание призмы лежит на основании пирамиды, а вершины верхнего основания — на боковых ребрах пирамиды. Найти объем призмы, если боковые ребра пирамиды равны a и наклонены к основанию под углом α .

2. В правильную треугольную пирамиду вписана правильная треугольная призма, боковые ребра которой в 2 раза больше ребер основания. Нижнее основание призмы лежит на основании пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на апофемах пирамиды. Найти ребро основания призмы, если апофема пирамиды равна a , а двугранные углы при ребре основания равны α .

3. В правильную треугольную пирамиду вписан цилиндр, у которого образующая равна радиусу. Окружность верхнего основания цилиндра касается боковых граней пирамиды, а нижнее основание цилиндра принадлежит нижнему основанию пирамиды. Найти объем цилиндра, если апофема пирамиды равна a и наклонена к основанию под углом α .

4. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α , вписана правильная треугольная призма, у которой все ребра равны a . Вершины верхнего основания призмы лежат на образующих конуса, а нижнее основание призмы лежит на основании конуса. Найти образующую конуса.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ *

Самостоятельная работа С-1

С-1-1.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из 5 членов. Записать ее второй и последний члены.

2. Написать три первых и 13-й члены последовательности $\{(1 + n)(n - 3)\}$.

3. По формуле общего члена записана такая последовательность: $-1, -2, -4, -8, \dots$. Найти 8-й член этой последовательности.

4'. В задаче 2 определить, какой порядковый номер имеет член, равный 60.

5 (н. о.). Найти формулу** общего члена последовательности, данной в задаче 3.

С-1-2.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из 4 членов. Записать ее первый и третий члены.

2. Написать три первых и 11-й члены последовательности $\{(n - 1)(n - 2)\}$.

3. По формуле общего члена записана такая последова-

* Все самостоятельные работы рассчитаны на 15—20 минут.

** Имеется в виду одна из возможных формул.

тельность: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$. Найти 7-й член этой последовательности.

4'. Узнать в задаче 2, какой порядковый номер имеет член, равный 110.

5 (н.о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3.

С-1-3.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из 6 членов. Записать ее четвертый и последний члены.

2. Написать три первых и 18-й члены последовательности $\{(2+n)(n-3)\}$.

3. По формуле общего члена записана такая последовательность: 2, 6, 18, 54, Найти 6-й член этой последовательности.

4'. Узнать в задаче 2, какой порядковый номер имеет член, равный 126.

5 (н.о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3.

С-1-4.

1. Написать какую-нибудь последовательность, состоящую из 5 членов. Записать ее третий и первый члены.

2. Написать три первых и 14-й члены последовательности $\{(n-4)(n-3)\}$.

3. По формуле общего члена записана такая последовательность:

$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \dots$. Найти 7-й

член этой последовательности.

4'. В задаче 2 определить, какой порядковый номер имеет член, равный 90.

5 (н.о.). Найти формулу общего члена последовательности, данной в задаче 3.

Самостоятельная работа С-2

С-2-1.

1. Привести пример убывающей последовательности.

2. По формуле общего члена записана такая последовательность: 1, 2, 4, 8, Найти 7-й член последовательности. Имеет ли эта последовательность предел?

3'. Является ли бесконечная последовательность $\{4n-1\}$ монотонной и ограниченной снизу? (Ответ пояснить.)

4 (н.о.). Написать формулу общего члена последовательности, данной в задаче 2.

С-2-2.

1. Привести пример возрастающей последовательности.

2. По формуле общего члена записана такая последовательность: 9, 16, 25, Найти 6-й член последовательности. Имеет ли эта последовательность предел?

3'. Является ли бесконечная последовательность $\{1 - n\}$ монотонной и ограниченной сверху? (Ответ пояснить.)

4 (н.о.). Написать формулу общего члена последовательности, данной в задаче 2.

С-2-3.

1. Привести пример убывающей последовательности.

2. По формуле общего члена записана такая последовательность: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$. Найти 6-й член последовательности. Имеет ли эта последовательность предел?

3'. Является ли бесконечная последовательность $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ монотонной и ограниченной снизу? (Ответ пояснить.)

4 (н.о.). Написать формулу общего члена последовательности, данной в задаче 2.

С-2-4.

1. Привести пример возрастающей последовательности.

2. По формуле общего члена записана последовательность $\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots$. Найти ее пятый член. Имеет ли эта последовательность предел?

3'. Является ли бесконечная последовательность $\left\{-\frac{n+1}{2}\right\}$ монотонной и ограниченной сверху? (Ответ пояснить.)

4 (н.о.). Написать формулу общего члена последовательности, данной в задаче 2.

Самостоятельная работа С-3

С-3-1.

1. Найти пределы (решить устно, записав только ответы):

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n^2-n+3}$$

2. Площадь круга равна $9\pi \text{ м}^2$. Найти длину его окружности.

3'. Сторона правильного треугольника равна 2 м. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

4 (н.о.). Найти площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, длину которой находили в задаче 2.

С-3-2.

1. Найти пределы (решить устно, записав только ответы):

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2-n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{2-n}.$$

2. Найти площадь круга, если длина окружности его равна $8\pi \text{ м}$.

3'. Площадь квадрата 16 м^2 . Найти радиус окружности, описанной около этого квадрата.

4 (н.о.). Найти площадь прямоугольного треугольника с углом 30° , вписанного в круг, площадь которого находили в задаче 2.

С-3-3.

1. Найти пределы (решить устно, записав только ответы):

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3+n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n^2-n+4}.$$

2. Площадь круга равна $16\pi \text{ м}^2$. Найти длину его окружности.

3'. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3 м. Найти периметр треугольника.

4 (н.о.). Найти площадь прямоугольного треугольника с углом 45° , вписанного в окружность длиной $4\pi \text{ м}$.

С-3-4.

1. Найти пределы (решить устно, записав только ответы):

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5-n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n}{1-2n}.$$

2. Найти площадь круга, если длина его окружности $4\pi \text{ м}$.

3. Радиус круга, описанного около квадрата, равен 5 м. Найти площадь квадрата.

4 (н.о.). Найти площадь прямоугольного треугольника с углом 60° , вписанного в круг, площадь которого $2\pi \text{ м}^2$.

С-4-1.

1. Площадь круга равна 4π м². Найти:

- а) длину окружности этого круга;
- б) сторону вписанного в этот круг правильного шестиугольника;
- в) площадь сектора этого круга, если дуга сектора содержит 24° .

2'. Дуга в 24° радиусом 12 м свернута в окружность. Найти радиус этой окружности.

С-4-2.

1. Длина окружности 10π м. Найти:

- а) площадь круга, ограниченного этой окружностью;
- б) сторону квадрата, вписанного в эту окружность;
- в) длину дуги этой окружности, если дуга содержит 27° .

2'. Окружность длиной 10π м разогнута в дугу 150° . Найти радиус этой дуги.

С-4-3.

1. Площадь круга равна 25π м². Найти:

- а) длину окружности этого круга;
- б) периметр вписанного в этот круг правильного шестиугольника;
- в) площадь сектора этого круга, если дуга сектора содержит 72° .

2'. Дуга в 36° радиусом 6 м свернута в окружность. Найти радиус этой окружности.

С-4-4.

1. Длина окружности 6π м. Найти:

- а) площадь круга, ограниченного этой окружностью;
- б) сторону вписанного в эту окружность правильного треугольника;
- в) длину дуги этой окружности, если дуга содержит 36° .

2'. Окружность длиной 6π м разогнута в дугу, содержащую 240° . Найти радиус этой дуги.

Самостоятельная работа С-5

С-5-1.

Дан ΔABC , в котором $b \approx 12$ м, $B \approx 28^\circ$, $C \approx 50^\circ$.
Найти: а) A , a , c ; б') h_c .

С-5-2.

Дан ΔABC , в котором $a \approx 17$ м, $B \approx 31^\circ$, $C \approx 40^\circ$.
Найти:

- а) A , b , c ; б') h_b .

С-5-3.

Дан $\triangle ABC$, в котором $c \approx 32$ м, $C \approx 33^\circ$, $B \approx 38^\circ$.
Найти: а) A , b , a ; б') h_c .

С-5-4.

Дан $\triangle ABC$, в котором $c \approx 65$ м, $A \approx 42^\circ$, $B \approx 27^\circ$.
Найти: а) C , a , b ; б') h_a .

Самостоятельная работа С-6

С-6-1.

Дан $\triangle ABC$, в котором $A \approx 37^\circ$, $c \approx 10$ м, $b \approx 30$ м.
Найти: а) a ; б') B , C .

С-6-2.

Дан $\triangle ABC$, в котором $a \approx 3$ м, $b \approx 4$ м, $c \approx 6$ м. Найти:
а) A ; б') C .

С-6-3.

Дан $\triangle ABC$, в котором $B \approx 62^\circ$, $c \approx 20$ м, $a \approx 30$ м.
Найти: а) b ; б') A , C .

С-6-4.

Дан $\triangle ABC$, в котором $a \approx 8$ м, $b \approx 5$ м, $c \approx 4$ м. Найти:
а) B ; б') A .

Самостоятельная работа С-7

С-7-1.

1. Вычислить в общем виде высоту скалы (AB), если базис (CD) равен a , а углы равны α и β (рис. 81).

2'. Используя рис. 81 и указанные на нем данные, найти расстояние от A до BD .

С-7-2.

1. С башни MN высотой h измерены углы φ и γ . Вычислить

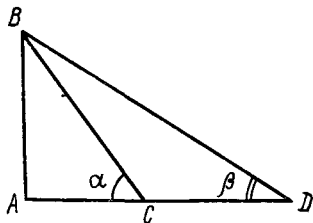


Рис. 81.

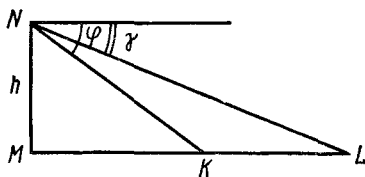


Рис. 82.

в общем виде расстояние KL , которое на местности недоступно (рис. 82).

2'. Используя рис. 82 и указанные на нем данные, найти расстояние от M до NL .

С-7-3.

1. Вычислить в общем виде высоту дерева (EF), если базис (AB) равен b , а углы — α и β (рис. 83).

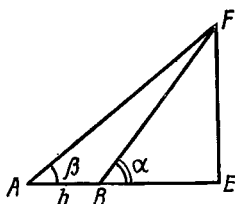


Рис. 83

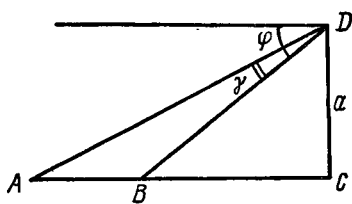


Рис. 84.

2'. Используя рис. 83 и указанные на нем данные, найти расстояние от E до AF .

С-7-4.

1. С крыши дома, расстояние которой от земли равно a , измерили углы γ и φ . Вычислить в общем виде ширину (AB) реки (рис. 84).

2'. Используя рис. 84 и указанные на нем данные, найти расстояние от C до AD .

Самостоятельная работа С-8*

С-8-1.

1. Провести сечение через прямую MN и точку K (рис. 85).

2'. Провести сечение через прямую MN и точку B (см. рис. 85).

3 (н.о.). Найти линию пересечения плоскости MNK с плоскостью, проходящей через параллельные прямые AB и MD (см. задачу 1).

С-8-2.

1. Провести сечение через прямую MN и точку K (рис. 86).

2'. Провести сечение через прямую MN и точку B (см. рис. 86).

3 (н.о.). Найти линию пересечения плоскости MNK с плоскостью, проходящей через параллельные прямые AB и MD (см. задачу 1).

* См. примечание 8.

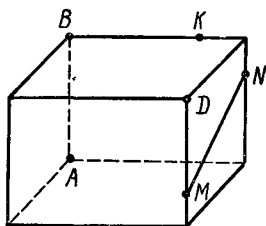


Рис. 85.

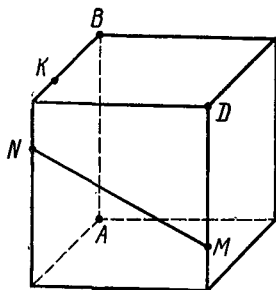


Рис. 86.

С-8-3.

1. Провести сечение через прямую MN и точку K (рис. 87).
- 2'. Провести сечение через прямую MN и точку B (см. рис. 87).
- 3 (н. о.). Найти линию пересечения плоскости MNK с плоскостью, проходящей через параллельные прямые AC и DM (см. задачу 1).

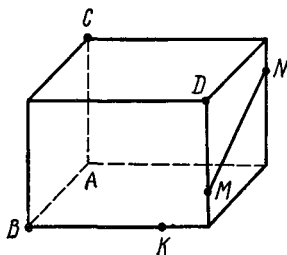


Рис. 87.

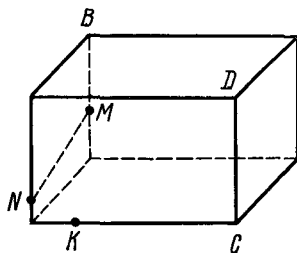


Рис. 88.

С-8-4.

1. Провести сечение через прямую MN и точку K (рис. 88).
- 2'. Провести сечение через прямую MN и точку C (см. рис. 88).
- 3 (н.о.). Найти линию пересечения плоскости MNK с плоскостью, проходящей через параллельные прямые BM и DC (см. задачу 1).

С-9-1.

1. Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ находятся на плоскости α , а B и C — вне ее. B' и C' — соответственно проекции B и C на плоскость α . Доказать, что $B'C' = AD$.

2. а) Провести сечение через точки M, N, L (рис. 89).

б') Провести сечение через точки K, N, L (см. рис. 89).

3 (н.о.). Если $AB \neq BC$, то может ли $AB'C'D$ быть ромбом? Ответ обосновать. (См. условие задачи 1.)

С-9-2.

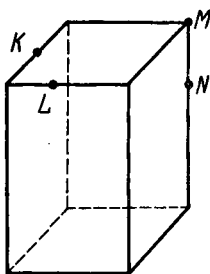


Рис. 89.

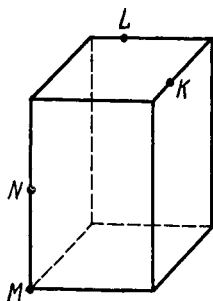


Рис. 90.

1. Вершины A и D ромба $ABCD$ находятся на плоскости α , а B и C — вне ее. B' и C' — соответственно проекции B и C на плоскость α . Доказать, что $B'C' \parallel AD$.

2. а) Провести сечение через точки M, N, K (рис. 90).

б') Провести сечение через точки K, N, L (см. рис. 90).

3 (н.о.). Может ли $AB'C'D$ быть ромбом? Ответ обосновать. (См. условие задачи 1.)

С-9-3.

1. Вершины A и D прямоугольника $ABCD$ находятся на плоскости α , а B и C — вне ее. B' и C' — соответственно проекции B и C на плоскость α . Доказать, что $B'C' = AD$.

2. а) Провести сечение через точки K, L, M (рис. 91).

б') Провести сечение через точки K, M, N (см. рис. 91).

3 (н.о.). Может ли $AB'C'D$ быть ромбом, если $AB \neq BC$? Ответ пояснить. (См. условие задачи 1.)

* См. примечание 8.

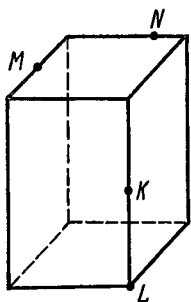


Рис. 91.

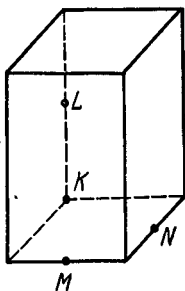


Рис. 92.

С-9-4.

1. Вершины A и D квадрата $ABCD$ находятся на плоскости α , а B и C — вне ее. B' и C' — соответственно проекции B и C на плоскость α . Доказать, что $B'C' \parallel AD$.

2. а) Провести сечение через точки K, L, N (рис. 92).

б') Провести сечение через точки M, N, L (см. рис. 92).

3 (н.о.). Может ли $AB'C'D$ быть ромбом? Ответ пояснить. (См. условие задачи 1.)

Самостоятельная работа С-10*

С-10-1.

1. Провести сечение в кубе через середину AB — точку K и середины ребер — точки F и E (рис. 93).

2. Отметить на рис. 93 угол, равный углу между прямыми AB и CD .

3'. Чему равен этот угол? (Объяснить.)

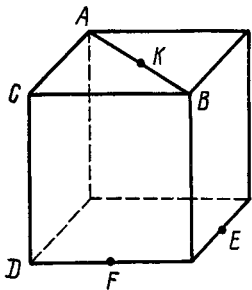


Рис. 93.

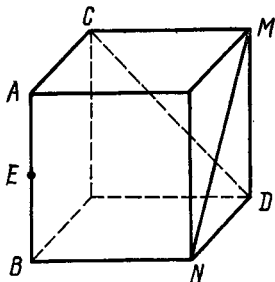


Рис. 94.

* См. примечание 8.

4 (н.о.). Найти периметр сечения, проведенного через точки F, K, E , если $CD = 2$ м.

С-10-2.

1. Провести сечение в кубе через MN и середину ребра AB — точку E (рис. 94).

2. Отметить на рис. 94 угол, равный углу между CD и NM .

3'. Чему равен этот угол? (Объяснить.)

4(н.о.). Найти периметр сечения, проведенного через точки M, N, E , если $AB = 3$ м.

С-10-3.

1. Провести сечение в кубе через середину EF — точку K и середину ребер — точки M и N (рис. 95).

2. Отметить на рис. 95 угол, равный углу между прямыми FE и AB .

3'. Чему равен этот угол? (Объяснить.)

4(н.о.). Найти периметр сечения, проведенного через точки M, N, K , если $AB = 4$ м.

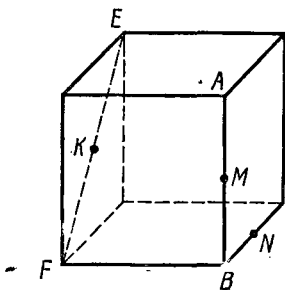


Рис. 95.

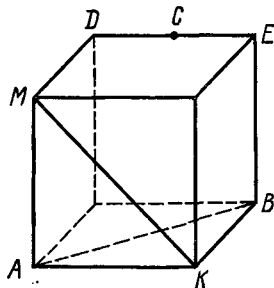


Рис. 96.

С-10-4.

1. Провести сечение в кубе через AB и середину DE — точку C (рис. 96).

2. Отметить на рис. 96 угол, равный углу между прямыми AB и MK .

3'. Чему равен этот угол? (Объяснить.)

4 (н.о.). Найти периметр сечения, проведенного через AB и точку C , если $AM = 1$ м.

Самостоятельная работа С-11

С-11-1.

1. Ромб $ABCD$ спроектирован на плоскость α . Вершины A, B, C отстоят от плоскости α на расстояния, соответственно равные 2 м, 3 м и 4 м.

а) Найти расстояние от середины диагонали AC до плоскости α .

б'). Найти расстояние от вершины D до плоскости α .

2. Доказать, что проекция ромба на плоскость α — параллелограмм или отрезок.

С-11-2.

1. Параллелограмм $ABCD$ спроектирован на плоскость α . Вершины A, B, D отстоят от плоскости α на расстояния, соответственно равные 4 м, 5 м и 6 м.

Найти расстояния до плоскости α :

а) от середины диагонали BD ;

б') от вершины C .

2. Доказать, что проекция параллелограмма на плоскость α — параллелограмм или отрезок.

С-11-3.

1. Квадрат $ABCD$ спроектирован на плоскость α . Вершины A, C, D отстоят от плоскости α на расстояния, соответственно равные 3 м, 5 м и 4 м.

Найти расстояния до плоскости α :

а) от середины диагонали AC ;

б') от вершины B .

2. Доказать, что проекция квадрата на плоскость α — параллелограмм или отрезок.

С-11-4.

1. Прямоугольник $ABCD$ спроектирован на плоскость α . Вершины B, C, D отстоят от плоскости α на расстояния, соответственно равные 5 м, 3 м и 7 м.

Найти расстояния до плоскости α :

а) от середины диагонали BD ;

б') от вершины A .

2. Доказать, что проекция прямоугольника на плоскость α — параллелограмм или отрезок.

Самостоятельная работа С-12

С-12-1.

1. Отрезки, заключенные между параллельными плоскостями α и β , равны 5 м и $\sqrt{80}$ м. Проекция на плоскость α одного из этих отрезков равна 8 м.

а) Найти проекцию другого отрезка на плоскость α .

б) Определить, чему равны проекции этих отрезков на плоскость β ?

в') Обосновать ответы на вопросы а) и б).-

2. 1) Начертить прямоугольный параллелепипед и указать в нем:

- а) два ребра, лежащие на скрещивающихся прямых;
- б) параллельные ребро и грань;
- в) грани, лежащие в параллельных плоскостях.

2') Обосновать ответы.

3 (н.о.). Провести сечение в параллелепипеде так, чтобы получилась трапеция (без обоснования).

С-12-2.

1. 1) Два отрезка заключены между двумя параллельными плоскостями α и β . Проекция их на плоскость α равны 4 м и 5 м. Один из отрезков равен 5 м.

а) Найти другой отрезок.

б) Найти проекции этих отрезков на плоскость β .

2') Обосновать ответы на вопросы а) и б).

2. 1) Начертить правильную шестиугольную призму и указать в ней:

а) два ребра, лежащие на скрещивающихся прямых;

б) параллельные ребро и грань;

в) две грани, лежащие в параллельных плоскостях.

2') Обосновать ответы.

3 (н.о.). Провести сечение в этой призме так, чтобы в сечении получился неправильный шестиугольник (без обоснования).

С-12-3.

1. Отрезки, заключенные между параллельными плоскостями α и β , равны 10 м и $\sqrt{164}$ м. Проекция на плоскость α одного из этих отрезков равна 10 м.

а) Найти проекцию другого отрезка на плоскость α .

б) Определить, чему равны проекции этих отрезков на плоскость β ?

в') Обосновать ответы на вопросы а) и б).

2. 1) Начертить куб и указать в нем:

а) два ребра, лежащие на скрещивающихся прямых;

б) параллельные ребро и грань;

в) грани, лежащие в параллельных плоскостях.

2). Обосновать ответы.

3 (н.о.). Провести в кубе сечение так, чтобы получился ромб, но не квадрат (без обоснования).

С-12-4.

1. Два отрезка заключены между двумя параллельными

плоскостями α и β . Проекции их на плоскость α равны 15 м и 12 м. Один из отрезков равен 13 м.

а) Найти другой отрезок.

б) Найти проекции этих отрезков на плоскость β .

в') Обосновать ответы на вопросы а) и б).

2. Начертить правильную шестиугольную призму и указать в ней:

а) два ребра, лежащие на скрещивающихся прямых;

б) параллельные ребро и грань;

в) две грани, лежащие в параллельных плоскостях.

3'. Обосновать ответы.

4 (н.о.). Провести сечение в этой призме так, чтобы в сечении получился пятиугольник (без обоснования).

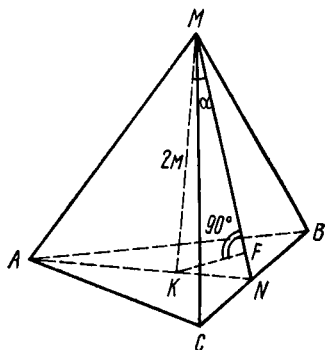


Рис. 97.

Самостоятельная работа С-13*

С-13-1.

Дана правильная пирамида (рис. 97), в которой MN — апофема, $\angle KMN = \alpha$, $KF \perp MN$, MK — высота пирамиды, $MK = 2$ м.

а) Доказать, что $BC \perp KF$.

б) Доказать, что $KF \perp$ пл. $СМВ$.

в') Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

С-13-2.

Дана правильная пирамида (рис. 98), в которой ME и ML — апофемы, $\angle NEL = \alpha$, $NL \perp ME$. MK — высота пирамиды, $EL = 4$ м.

а) Доказать, что $AB \perp NL$.

б) Доказать, что $NL \perp$ пл. AMB .

в') Найти радиус окружности, описанной около треугольника MEL .

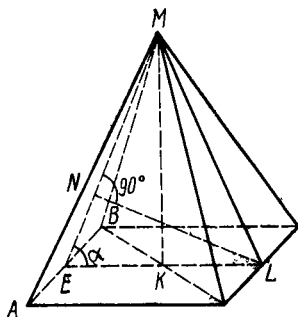


Рис. 98.

* См. примечание 8.

С-13-3.

Дана правильная пирамида (рис. 99), в которой MO — высота пирамиды, $OE \perp AB$, $OD \perp ME$, $\angle MEO = \alpha$, $AB = 6$ м.

а) Доказать, что $AB \perp OD$.

б) Доказать, что $OD \perp$ пл. AMB .

в) Найти диаметр окружности, описанной около треугольника MEO .

С-13-4.

Дана правильная пирамида (рис. 100), в которой $\angle MAK = \alpha$. MK — высота пирамиды, $MK = a$.

а) Доказать, что $BC \perp$ пл. AMK .

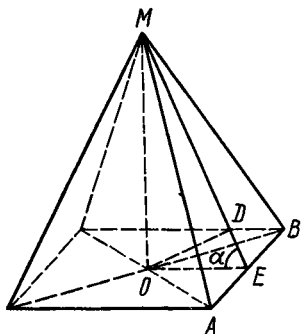


Рис. 99

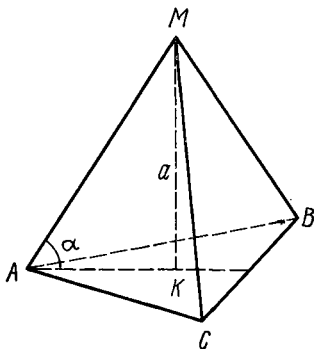


Рис. 100

б) Доказать, что $BC \perp AM$:

в) Найти расстояние от точки K до AM .

Самостоятельная работа С-14**С-14-1.**

Точки C и D принадлежат плоскости P , точки M и N — плоскости Q . Отрезок CM перпендикулярен плоскостям P и Q , $CM = 2$ м, $DN = 4$ м. Найти:

а) проекции DN на плоскости P и Q (объяснить);

б) угол между CM и DN .

С-14-2.

Точки B и K принадлежат плоскости P . Отрезок $AB \perp P$ и $AB \parallel MK$. $AB = 6$ м, $MK = 9$ м. Найти:

а) BK , если $AM = 5$ м (объяснить);

б) KE , где E — точка пересечения прямой MA с плоскостью P .

С-14-3.

Плоскость P параллельна плоскости Q . Отрезок MK , равный $2\sqrt{3}$ м, принадлежит плоскости Q , точка C принадлежит плоскости P . CM перпендикулярна плоскости P , $CM = 2$ м. Найти:

- а) отрезок CK (с обоснованием);
- б') угол MSK .

С-14-4.

Отрезок AB , равный 3 м, принадлежит плоскости Q . Отрезки AM и BK перпендикулярны плоскости Q . $AM = 2$ м, $BK = 6$ м. Найти:

- а) KM (с объяснением);
- б') отрезок CK , где C — точка пересечения прямой MK с плоскостью Q .

Самостоятельная работа С-15**С-15-1.**

Через гипотенузу с треугольника ABC с катетами 3 м и 4 м проведена плоскость P под углом 30° к плоскости треугольника. Найти:

- а) расстояние от вершины C до плоскости P ;
- б') расстояние от точки пересечения медиан ΔABC до плоскости P .

С-15-2.

Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость Q под углом 45° к плоскости ромба. У ромба сторона равна $6\sqrt{2}$ м, а острый угол равен 30° . Найти:

- а) расстояние от BC до плоскости Q ;
- б') расстояние до плоскости Q от точки M , лежащей на диагонали BD , если $BM : MD = 3 : 2$.

3-15-3.

Через большее основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ с углом 45° проведена плоскость P под углом 30° к плоскости трапеции. Сторона $CD = 8\sqrt{2}$ м. Найти:

- а) расстояние от точки C до плоскости P ;
- б') расстояние до плоскости P от точки M , лежащей на диагонали BD , если $BM : MD = 1 : 2$.

С-15-4.

Через сторону AD параллелограмма $ABCD$ с углом 30° проведена плоскость Q под углом 45° к плоскости параллелограмма. Сторона $AB = 4\sqrt{2}$ м. Найти:

- а) расстояние от точки B до плоскости Q ;
 б') расстояние до плоскости Q от точки M , лежащей на стороне CD , если $CM : MD = 4 : 1$.

Самостоятельная работа С-16

С-16-1.

1. Возможен ли такой многогранный угол, плоские углы которого: а) 80° , 100° , 30° ; б') 160° , 70° , 50° , 80° .

2. В трехгранном угле $SABC$ дано: $\angle BSC = 90^\circ$, $\angle ASB = \angle ASC = 60^\circ$. Найти:

а) угол между SC и SA' , проекцией SA на плоскость BSC ;

б') SA' , если $SA = 2\sqrt{2}$ м.

С-16-2.

1. Возможен ли такой многогранный угол, плоские углы которого а) 30° , 120° , 80° ; б') 160° , 40° , 70° , 60° ?

2. В трехгранном угле $MEFK$ дано: $\angle EMF = \angle EMK = 45^\circ$, $\angle FMK = 60^\circ$. ME' — проекция ME на плоскость FMK . Найти:

а) угол между ME' и MF (с обоснованием);

б') ME , если $ME' = 2\sqrt{3}$ м.

С-16-3.

1. Возможен ли такой многогранный угол, плоские углы которого: а) 40° , 60° , 100° ; б') 180° , 40° , 120° , 50° ?

2. В трехгранном угле $KMEF$ $\angle MKF = \angle MKE = 60^\circ$, $\angle EKf = 90^\circ$, $MM' \perp$ пл. KEF . Найти:

а) $\angle EKM'$ (с обоснованием);

б') KM , если $KM' = 4\sqrt{2}$ м.

С-16-4.

1. Возможен ли такой многогранный угол, плоские углы которого: а) 50° , 60° , 100° ; б') 150° , 60° , 70° , 40° ?

2. В трехгранном угле $MAVK$ $\angle AMK = \angle AMB = \angle KMB = 60^\circ$. MA' — проекция MA на плоскость KMB . Найти:

а) $\angle A'MB$ (с обоснованием);

б') MA' , если $MA = 2\sqrt{3}$ м.

Самостоятельная работа С-17

С-17-1.

В прямом параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ с высотой, равной 48 м, стороны основания равны 6 м и 10 м, а угол между этими сторонами 120° .

а) Найти большую диагональ параллелепипеда.

б') Найти расстояние от DD' до плоскости $AA'C$.

C-17-2.

В прямом параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ с высотой $3\sqrt{3}$ м стороны основания равны 8 м и 15 м, острый угол в основании 60° .

а) Найти меньшую диагональ параллелепипеда.

б') Найти расстояние от CC' до плоскости $BB'D$.

C-17-3.

В прямом параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ с высотой $3\sqrt{3}$ м стороны основания $CD = 7$ м, $AD = 8$ м и $\angle ADC = 120^\circ$.

а) Найти большую диагональ параллелепипеда.

б') Найти расстояние от BB' до плоскости $AC'C$.

C-17-4.

В прямом параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ с высотой, равной 48 м, стороны основания $BC = 6$ м, $DC = 16$ м, $\angle BCD = 60^\circ$.

а) Найти меньшую диагональ параллелепипеда.

б') Найти расстояние от AA' до плоскости $BD'D$.

Самостоятельная работа C-18

C-18-1.

В пирамиде сечение, перпендикулярное высоте пирамиды, делит высоту в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды. Найти:

а) площадь сечения, если площадь основания равна 16 м^2 ;

б') периметр сечения, если периметр основания равен 16 м.

C-18-2.

В пирамиде сечение, параллельное основанию пирамиды, делит высоту в отношении $2 : 5$, считая от вершины пирамиды. Найти:

а) площадь основания пирамиды, если площадь сечения равна 4 м^2 ;

б') периметр основания, если периметр сечения равен 8 м.

C-18-3.

В пирамиде сечение, перпендикулярное высоте пирамиды, делит высоту в отношении $1 : 4$, считая от вершины пирамиды. Найти:

а) площадь сечения, если площадь основания равна 100 м^2 ;

б) периметр сечения, если периметр основания равен 40 м.

С-18-4.

В пирамиде сечение, параллельное основанию пирамиды, делит высоту в отношении 4 : 3, считая от вершины пирамиды. Найти:

- а) площадь основания, если площадь сечения равна 64 м^2 ;
- б) периметр основания, если периметр сечения равен 32 м.

Самостоятельная работа С-19**С-19-1.**

В основании прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 6 м и 8 м. Высота призмы 10 м. Найти:

- а) полную поверхность призмы;
- б) расстояние от вершины прямого угла верхнего основания до гипотенузы нижнего основания.

С-19-2.

В основании прямой призмы — ромб $ABCD$ с диагоналями 8 м и 6 м. Высота призмы 8 м. Найти:

- а) полную поверхность призмы;
- б) расстояние от вершины D тупого угла верхнего основания до стороны $B'C'$ нижнего основания.

С-19-3.

В основании прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 13 м, и катетом, равным 5 м. Высота призмы 8 м. Найти:

- а) полную поверхность призмы;
- б) расстояние от вершины меньшего угла нижнего основания до меньшей стороны верхнего основания.

С-19-4.

В основании прямой призмы — ромб со стороной 2 м и углом 60° . Высота призмы $10\sqrt{3}$ м. Найти:

- а) полную поверхность призмы;
- б) расстояние от точки пересечения диагоналей нижнего основания до стороны верхнего основания.

Самостоятельная работа С-20**С-20-1.**

В основании пирамиды — прямоугольник со сторонами 30 м и 12 м. Боковые ребра пирамиды равны. Высота пирамиды 8 м. Найти:

- а) боковую поверхность пирамиды;
- б) расстояние от основания высоты пирамиды до меньшей боковой грани.

С-20-2.

В основании пирамиды — ромб со стороной 2 м и углом 45° . Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найти:

- а) боковую поверхность пирамиды;
- б) расстояние от основания высоты до боковой грани.

С-20-3.

В основании пирамиды — прямоугольник. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под одним углом. Высота пирамиды и высоты боковых граней соответственно равны 16 м, 20 м и 34 м. Найти:

- а) боковую поверхность пирамиды;
- б) расстояние от основания высоты пирамиды до большей боковой грани.

С-20-4.

В основании пирамиды — треугольник со сторонами 6 м и 6 м и углом между ними 30° . Боковые грани наклонены к основанию под углом 45° . Найти:

- а) боковую поверхность пирамиды;
- б) расстояние от основания высоты до боковой грани.

Самостоятельная работа С-21

С-21-1.

Основание призмы — правильный треугольник ABC со стороной 4 см, боковое ребро AA' равно 8 см и составляет с плоскостью основания угол 60° .

- а) Найти объем призмы.
- б) Доказать, что у этой призмы грань $BB'C'C$ будет прямоугольником, если проекция ребра AA' лежит на высоте h_a основания призмы.

С-21-2.

Основание призмы — квадрат $ABCD$ со стороной 2 см. Боковое ребро BB' равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол 30° .

- а) Найти объем призмы.
- б) Доказать, что сечение $AA'C'C$ — прямоугольник, если проекция ребра BB' лежит на диагонали BD .

С-21-3.

В основании призмы — равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = AC = 6$ см, $\angle BAC = 30^\circ$. Боковое ребро призмы равно 2 см и составляет с плоскостью основания угол 45° .

- а) Найти объем призмы.

б') Доказать, что грань $BB'C'C$ — прямоугольник, если проекция ребра AA' лежит на высоте h_a основания.

С-21-4.

Основание призмы — ромб $ABCD$ с диагоналями 4 м и 3 м. Боковое ребро CC' равно 2 м и составляет с плоскостью основания угол 60° .

а) Найти объем призмы.

б') Доказать, что сечение $DD'B'B$ — прямоугольник, если проекция ребра CC' лежит на диагонали AC .

Самостоятельная работа С-22

С-22-1.

Основание пирамиды — ромб со стороной 4 м и острым углом 30° . Двугранные углы при основании пирамиды содержат по 45° .

а) Найти объем пирамиды.

б') Провести сечение через ребро основания и середину высоты пирамиды.

С-22-2.

Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5 см, 12 см и 13 см. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом 45° .

а) Найти объем пирамиды.

б') Провести сечение через одну из сторон основания и середину высоты пирамиды.

С-22-3.

В основании пирамиды — равнобедренная трапеция с боковой стороной 6 см и углом 30° . Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° .

а) Найти объем пирамиды.

б') Провести сечение через одну из сторон основания и середину высоты пирамиды.

С-22-4.

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 3 см. Боковые ребра пирамиды равны каждое 5 см.

а) Найти объем пирамиды.

б') Провести сечение через какое-нибудь ребро основания и середину высоты пирамиды.

Самостоятельная работа С-23

С-23-1.

Ребро правильного тетраэдра $\sqrt{6}$ м. Найти:

а) объем тетраэдра;

б') расстояние от основания высоты до боковой грани.

С-23-2.

Высота грани правильного октаэдра $\sqrt{3}$ м.

а) Найти объем октаэдра.

б') Доказать, что сечение, проходящее через два пересекающихся ребра, не принадлежащих одной грани, квадрат.

С-23-3.

Апофема правильного тетраэдра равна 3 м. Найти:

а) объем тетраэдра;

б') расстояние от основания высоты до бокового ребра.

С-23-4.

Ребро правильного октаэдра $2\sqrt{3}$ м.

а) Найти объем октаэдра:

б). Доказать, что противоположные грани параллельны.

Самостоятельная работа С-24

С-24-1.

В конусе образующая, равная $2\sqrt{3}$ м, наклонена к основанию под углом 30° . Через две образующие конуса проведена плоскость под углом 60° к основанию. Найти:

а) перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на хорду AB , которая получилась от пересечения плоскости сечения с основанием конуса;

б') половину хорды AB .

С-24-2.

В конусе высота равна $\sqrt{2}$ м, а образующая составляет с основанием угол 45° . Через две образующие конуса, между которыми угол 60° , проведена плоскость. Найти:

а) длину хорды AB , по которой плоскость сечения пересекает основание конуса;

б') расстояние от основания высоты конуса до AB .

С-24-3.

В конусе образующая, равная $2\sqrt{6}$ м, наклонена к основанию под углом 45° . Через две образующие конуса проведена плоскость под углом 60° к основанию. Найти:

а) длину перпендикуляра, опущенного из вершины конуса на хорду AB , которая получилась от пересечения с основанием плоскости сечения;

б') половину хорды AB .

С-24-4.

В конусе высота равна $2\sqrt{2}$ м, а образующая составляет с основанием угол 30° . Через две образующие конуса, между которыми угол 90° , проведена плоскость. Найти:

а) хорду AB , полученную от пересечения плоскости с основанием конуса;

б') расстояние от основания высоты конуса до AB .

Самостоятельная работа С-25

С-25-1.

Площадь осевого сечения цилиндра 24 м^2 , а высота цилиндра относится к диаметру основания как $3 : 2$. Найти:

а) объем цилиндра;

б') объем правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр.

С-25-2.

В осевом сечении цилиндра диагональ сечения равна $2c$ и составляет с основанием угол β . Найти:

а) боковую поверхность цилиндра;

б') объем правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр.

С-25-3.

Периметр осевого сечения цилиндра 28 м , а диаметр основания относится к высоте цилиндра как $4 : 3$. Найти:

а) объем цилиндра;

б') объем вписанного в цилиндр параллелепипеда, диагонали основания которого пересекаются под углом 30° .

С-25-4.

Диагональ осевого сечения цилиндра равна $2a$ и составляет с образующей угол α . Найти:

а) боковую поверхность цилиндра;

б') объем вписанной в цилиндр правильной шестиугольной призмы.

Самостоятельная работа С-26

С-26-1.

В конусе образующая равна $2a$ и составляет с высотой конуса угол α . Найти:

а) объем и боковую поверхность конуса;

б') радиус окружности, описанной около осевого сечения конуса.

С-26-2.

В конусе с высотой a образующая наклонена к основанию под углом 2β . Найти:

а) объем и боковую поверхность конуса;

б') радиус окружности, вписанной в осевое сечение конуса.

С-26-3.

В конусе радиус основания равен a , угол между образующими в осевом сечении конуса 2β . Найти:

а) объем и боковую поверхность конуса;

б) радиус окружности, описанной около осевого сечения конуса.

С-26-4.

В конусе образующая равна $2b$ и составляет с основанием угол 2α . Найти:

а) объем и боковую поверхность конуса;

б) радиус окружности, вписанной в осевое сечение конуса.

Самостоятельная работа С-27**С-27-1.**

1. Шар радиусом 5 см пересечен плоскостью на расстоянии 3 см от центра. Найти площадь сечения.

2. К шару радиусом OA проведена касательная плоскость, на которой находится отрезок AB , равный 40 см. Из точки B проведена секущая BOK , равная 50 см (точка K лежит на поверхности шара). Найти радиус шара.

С-27-2.

1. Шар пересечен плоскостью на расстоянии 6 см от центра. Площадь сечения равна 64π см². Найти радиус шара.

2'. К шару радиусом OB проведена касательная плоскость, на которой находится отрезок BC , равный 12 см. Из точки C проведена секущая $CDOK$, т. е. CK (точки D и K лежат на поверхности шара). $CD = 8$ см. Найти радиус шара.

С-27-3.

1. Шар пересечен плоскостью, перпендикулярной диаметру и делящей диаметр на два отрезка: 2 см и 18 см. Найти площадь сечения.

2'. К шару радиусом OK проведена касательная плоскость, на которой находится отрезок KC , равный 24 м. Из точки C проведена секущая COE (точка E лежит на поверхности шара), равная 32 м. Найти радиус шара.

С-27-4.

1. Шар пересечен плоскостью на расстоянии 5 см от центра. Площадь сечения 144π см². Найти радиус шара.

2'. К шару радиусом OD проведена касательная плоскость, на которой находится отрезок DE , равный 4 см. Из точки E проведена секущая $EKOM$, т. е. EM (точки K и M лежат на поверхности шара). Найти радиус шара, если $EK = 2$ см.

С-28-1.

$BE = 2$ см, $AC \perp BD$ (рис. 101).

а) Найти площадь поверхности, полученной вращением дуги AB вокруг BO , и объем шара радиусом OC .

б') Под каким углом пересекаются плоскости, касающиеся шара в точках D и C ? (Ответ обосновать.)

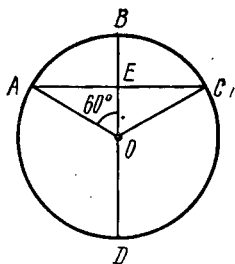


Рис. 101.

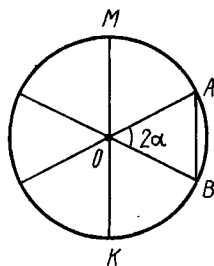


Рис. 102.

С-28-2.

$AB \parallel MK$, $AB = 2a$ (рис. 102).

а) Найти объем шарового сектора, полученного вращением кругового сектора OAB вокруг MK , и поверхность шара радиусом OA .

б') Под каким углом пересекаются плоскости, касающиеся шара в точках M и A ? (Ответ обосновать.)

С-28-3.

$BO = 1$ см, $CD \perp KM$ (рис. 103).

а) Найти площадь поверхности, полученной вращением дуги CK вокруг KO , и объем шара радиусом OC .

б') Под каким углом пересекаются плоскости, касающиеся шара в точках C и D ? (Ответ обосновать.)

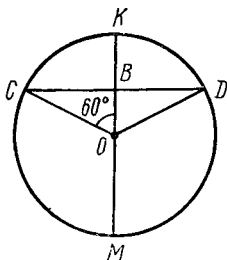


Рис. 103.

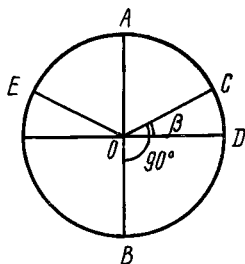


Рис. 104.

С-28-4.

Поверхность шара радиусом OA равна $16\pi a^2$ (рис. 104).

а) Найти радиус шара и объем шарового сектора, полученного вращением кругового сектора OCD вокруг AO .

б') Под каким углом пересекаются плоскости, касающиеся шара в точках C и E ? (Ответ обосновать.)

Самостоятельная работа С-29**С-29-1.**

В шар вписана призма, в основании которой прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $2a$, и углом α . Диагональ большей боковой грани наклонена к основанию призмы под углом α .

а) Выполнить чертеж и найти объем шара.

б') Найти объем призмы.

С-29-2.

В правильную четырехугольную пирамиду, у которой боковые грани наклонены к основанию под углом 2α , вписан шар. Ребро основания пирамиды равно $2a$.

а) Выполнить чертеж и найти поверхность шара.

б') Найти расстояние от ребра основания до противоположной боковой грани.

С-29-3.

В шар вписана четырехугольная призма, диагонали основания которой составляют угол α и равны по $2a$. Диагональ призмы составляет с боковым ребром угол α .

а) Выполнить чертеж и найти объем шара.

б') Найти объем призмы.

С-29-4.

В правильную треугольную пирамиду, у которой боковые грани наклонены под углом 2β , вписан шар. Радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен $2a$.

а) Выполнить чертеж и найти поверхность вписанного шара.

б') Найти расстояние от вершины основания пирамиды до противоположной боковой грани.

Самостоятельная работа С-30**С-30-1.**

В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 3$ м, $AD = 8$ м и угол $A = 60^\circ$.

а) Найти диагональ BD и площадь параллелограмма.

б') Найти углы треугольника ABD (с точностью до градуса).

С-30-2.

В треугольнике ABC угол $B = 120^\circ$, стороны $a = 5$ м, $c = 3$ м. Найти:

а) сторону b и площадь треугольника ABC ;

б') углы треугольника (с точностью до градуса).

С-30-3.

В треугольнике ABC стороны $c = 5$ м, $b = 8$ м, угол $A = 60^\circ$. Найти:

а) сторону a и площадь треугольника ABC ;

б') углы треугольника (с точностью до градуса).

С-30-4.

В параллелограмме $ABCD$ стороны $AD = 16$ м, $DC = 5$ м, угол $D = 120^\circ$. Найти:

а) диагональ AC и площадь параллелограмма;

б') углы треугольника ADC (с точностью до градуса).

Самостоятельная работа С-31

С-31-1.

Отрезок AB расположен над плоскостью, и его концы удалены от этой плоскости на расстояния: A на 2 см, B на 5 см. Проекция AB на плоскость равна 4 см. Найти:

а) отрезок AB ;

б') расстояние от середины отрезка до плоскости;

в') расстояние от середины отрезка до плоскости, если отрезок пересекает плоскость, при этом точка A отстоит от плоскости на расстояние 1 м, а точка B — на 2 м.

С-31-2.

Концы отрезка MK , равного 5 м и расположенного над плоскостью, отстоят от плоскости: M на 4 м, K на 8 м. Найти:

а) проекцию отрезка MK на плоскость;

б') расстояние от середины отрезка MK до плоскости;

в') расстояние от середины отрезка до плоскости, если отрезок пересекает плоскость, при этом точка M отстоит от плоскости на 3 м, а точка K — на 1 м.

С-31-3.

Отрезок CD расположен над плоскостью, и его концы удалены от этой плоскости: C на 6 м, D на 11 м. Проекция CD на плоскость равна 12 м. Найти:

а) отрезок CD ;

б') расстояние от середины отрезка CD до плоскости;

в') расстояние от середины отрезка до плоскости, если от-

резок пересекает плоскость, при этом точка C отстоит от плоскости на 2 м, точка D — на 3 м.

С-31-4.

Концы отрезка BE , равного 13 м и расположенного над плоскостью, отстоят от плоскости: B на 4 м, E на 16 м. Найти:

- а) проекцию отрезка BE на плоскость;
- б') расстояние от середины отрезка BE до плоскости;
- в') расстояние от середины отрезка до плоскости, если отрезок пересекает плоскость, при этом точка B отстоит от плоскости на 8 м, точка E — на 4 м.

Самостоятельная работа С-32

С-32-1.

В полный конус вписана правильная четырехугольная усеченная пирамида так, что ее нижнее основание вписано в основание конуса. Площадь верхнего основания пирамиды в 9 раз меньше площади нижнего, равного 18 м^2 . Образующая конуса наклонена к основанию под углом 45° . Найти:

- а) высоту конуса;
- б') объем усеченной пирамиды.

С-32-2.

В правильную усеченную треугольную пирамиду вписан усеченный конус. Радиусы окружностей, описанных около оснований пирамиды, равны 2 м и 8 м. Боковое ребро пирамиды равно $2\sqrt{13}$ м. Найти:

- а) высоту данной пирамиды;
- б') объем усеченного конуса.

С-32-3.

В полный конус вписана правильная треугольная усеченная пирамида так, что ее нижнее основание вписано в основание конуса. Площадь нижнего основания в четыре раза больше площади верхнего. Высота конуса равна 8 м, а образующая — 10 м. Найти:

- а) высоту усеченной пирамиды;
- б') объем усеченной пирамиды.

С-32-4.

В правильной усеченной четырехугольной пирамиде ребра оснований равны: нижнего — 12 м, верхнего — 2 м, апофема равна 13 м. В эту пирамиду вписан усеченный конус. Найти:

- а) высоту усеченного конуса;
- б') объем усеченного конуса.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа К-1

К-1-1.

1. Придумайте какую-нибудь возрастающую последовательность и выпишите ее 4-й член.

2. а) Напишите четыре первые и 8-й члены последовательности $\left\{ \frac{3n+1}{2} \right\}$.

б') Возрастающая или убывающая эта последовательность?

в') Имеет ли эта последовательность предел и, если имеет, то какой?

3. Найти пределы переменных величин:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{5n - 3n^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 4} + 2 \right).$$

4. По формуле общего члена была записана последовательность $\frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \dots$.

а) Написать 7-й член и формулу* общего члена этой последовательности.

б') Содержится ли число 0,0625 среди членов последовательности и, если содержится, то найти номер этого члена.

5 (н.о.). Будет ли последовательность $\{12n - n^2 - 20\}$ монотонной? Ответ пояснить.

К-1-2.

1. Придумайте какую-нибудь монотонную последовательность и выпишите ее 5-й член.

2. а) Написать первые четыре члена и 7-й член последовательности $\left\{ \frac{3n}{1-2n} \right\}$.

б') Возрастающая или убывающая эта последовательность?

3. Найти пределы переменных величин:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2}{5 - 3n^2}; \quad \text{б') } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2}{n^2 - 3} - 1 \right).$$

4. По формуле общего члена была записана последовательность $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots$.

а) Написать 6-й член и формулу общего члена этой последовательности.

* Имеется в виду одна из возможных формул.

б') Содержится ли число 1,999 среди членов последовательности и, если содержится, то найти номер этого члена.

5 (н.о.). Будет ли последовательность $\{n^2 + 4n - 12\}$ монотонной? Ответ пояснить.

К-1-3.

1. Придумайте какую-нибудь убывающую последовательность и выпишите ее 4-й член.

2. а) Напишите четыре первые и 6-й член последовательности $\left\{ \frac{1+2n}{4n} \right\}$.

б') Возрастающая или убывающая эта последовательность?

в') Имеет ли эта последовательность предел и, если имеет, то какой?

3. Найти пределы переменных величин:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-4n^2}{4n^2-n}; \quad \text{б') } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{n^2-4}{3-2n^2} \right).$$

4. По формуле общего члена была записана последовательность $\frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{9}{5}, \frac{12}{6}, \dots$.

а) Написать 6-й член и формулу общего члена этой последовательности.

б') Содержится ли число 2,64 среди членов последовательности и, если содержится, то найти номер этого члена.

5 (н.о.). Будет ли последовательность $\{n^2 - n - 6\}$ монотонной? Ответ пояснить.

К-1-4.

1. Придумайте какую-нибудь монотонную последовательность и выпишите ее 4-й член.

2. а) Написать четыре первые и 7-й члены последовательности $\left\{ \frac{4n}{2-3n} \right\}$.

б') Возрастающая или убывающая эта последовательность?

в') Имеет ли эта последовательность предел и, если имеет, то какой?

3. Найти пределы переменных величин:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n}{4+3n}; \quad \text{б') } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-3}{n^2+1} - 5 \right).$$

4. По формуле общего члена была записана последовательность $\frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{9}, \frac{7}{11}, \dots$.

а) Написать 6-й член и формулу общего члена этой последовательности.

б') Содержится ли число 0,56 среди членов последовательности и, если содержится, то найти номер этого члена.

5 (н.о.). Будет ли последовательность $\{n^2 - 16n + 28\}$ монотонной? Ответ пояснить.

Контрольная работа К-2

К-2-1.

1. Длина окружности равна 10л м. Найти:

- а) площадь круга, ограниченного этой окружностью;
- б) длину дуги этой окружности, если дуга содержит 135° ;
- в') хорду, стягивающую в этой окружности дугу в 120° ;
- г) площадь сектора, ограниченного радиусами данной окружности, с центральным углом 40° ;

д') площадь квадрата, вписанного в эту окружность.

2(н.о.). Центр окружности, касающейся двух оснований и боковой стороны трапеции, удален от концов этой боковой стороны на 3 м и 4 м. Найти радиус окружности.

К-2-2.

1. Площадь круга равна 81 л м². Найти:

- а) длину окружности этого круга;
- б) длину дуги окружности этого круга, если дуга содержит 150° ;
- в') хорду, стягивающую дугу окружности этого круга, если дуга содержит 90° ;
- г) площадь сектора этого круга с центральным углом 50° ;
- д') площадь правильного треугольника, вписанного в данный круг.

2 (н.о.). В общую часть двух равных пересекающихся окружностей вписан ромб с диагоналями 16 м и 8 м. Найти радиусы окружностей.

К-2-3.

1. Длина окружности равна 12л м. Найти:

- а) площадь круга, ограниченного этой окружностью;
- б) длину дуги этой окружности, если дуга содержит 225° ;
- в') хорду, стягивающую в этой окружности дугу в 240° ;
- г) площадь сектора, ограниченного радиусами данной окружности, с центральным углом 70° ;

д') площадь правильного шестиугольника, вписанного в данную окружность.

2 (н.о.). Хорда окружности равна 6 м. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой—

секущая, параллельная касательной. Внутренний отрезок секущей равен $4\sqrt{5}$ м. Найти радиус окружности.

К-2-4.

1. Площадь круга равна 100π м². Найти:

а) длину окружности этого круга;

б) длину дуги окружности этого круга, если дуга содержит 210° ;

в) хорду, стягивающую дугу окружности этого круга, если дуга содержит 270° ;

г) площадь сектора данного круга с центральным углом 80° ;

д) площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, вписанного в данный круг.

2(н.о.). В треугольнике с катетами 3 м и 4 м найти расстояние от центра вписанной окружности до вершины прямого угла.

Контрольная работа К-3

К-3-1.

1. Дан $\triangle ABC$, в котором $a \approx 6$ м, $b \approx 5$ м, $c \approx 7$ м. Найти: A , B , C .

2'. Дан $\triangle ABC$, в котором $a \approx 17$ м, $b \approx 40$ м, $A \approx 23^\circ$. Найти: B .

3 (н.о.). Найти во второй задаче h_c .

К-3-2.

1. Дан $\triangle ABC$, в котором $A \approx 32^\circ$, $c \approx 4$ м, $b \approx 5$ м. Найти: a , B , C .

2'. Дан $\triangle ABC$, в котором $b \approx 33$, $c \approx 23$, $B \approx 45^\circ$. Найти: A .

3 (н.о.). Найти во второй задаче h_b .

К-3-3.

1. Дан $\triangle ABC$, в котором $a \approx 7$ м, $b \approx 8$ м, $c \approx 9$ м. Найти: A , B , C .

2'. Дан $\triangle ABC$, в котором $c \approx 30$ м, $b \approx 44$ м, $C \approx 19^\circ$. Найти: B .

3(н.о.). Найти во второй задаче h_b .

К-3-4.

1. Дан $\triangle ABC$, в котором $a \approx 5$ м, $b \approx 6$ м, $C \approx 41^\circ$. Найти: A , B , c .

2. Дан $\triangle ABC$, в котором $b \approx 35$ м, $a \approx 30$ см, $A \approx 36^\circ$. Найти: C .

3(н.о.). Найти во второй задаче h_a .

К-4-1.

1. Провести сечение в пирамиде через прямую MK , параллельную AB , и прямую MN (рис. 105).

2. Из точки A проведены к плоскости две наклонные — AB под углом 30° и AC под углом 45° . $AB = 4$ м.

а) Найти расстояние от точки A до плоскости и AC .

б') Найти CB , если $\angle BAC = 45^\circ$.

в) (н.о.) Найти угол между проекциями наклонных AB и AC .

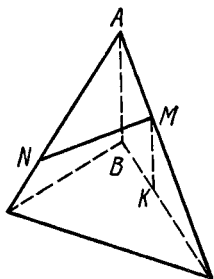


Рис. 105.

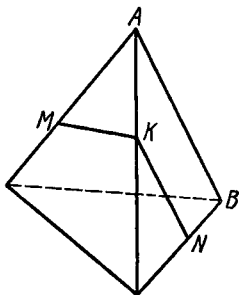


Рис. 106.

К-4-2.

1. Провести сечение в пирамиде через прямую NK , параллельную AB , и прямую KM (рис. 106).

2. Наклонные CD и CB составляют с плоскостью углы, соответственно равные 45° и 60° . Проекция CD на плоскость равна 2 м.

а) Найти расстояние от точки C до плоскости и CB .

б') Найти DB , если угол между проекциями наклонных на плоскость равен 30° .

в) (н.о.) Найти угол между наклонными.

К-4-3.

1. Провести сечение в пирамиде через прямую MN , параллельную AB , и прямую KM (рис. 107).

2. Из точки K к плоскости α проведены две наклонные KB и KC под углами соответственно 60° и 30° . Проекция KB на плоскость α равна $\sqrt{3}$ м.

а) Найти расстояние от точки K до плоскости α и KC .

б') Найти BC , если угол между проекциями наклонных равен 60° .

в) (н.о.) Найти угол между наклонными.

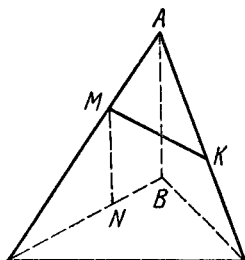


Рис. 107.

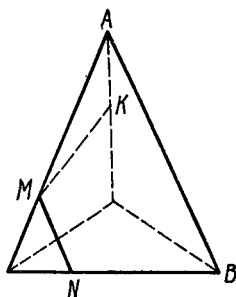


Рис. 108.

К-4-4.

1. Провести сечение в пирамиде через прямую MN , параллельную AB , и прямую KM (рис. 108).

2. Наклонная MA равна 4 м, ее проекция равна 2 м, наклонная MB составляет с плоскостью угол 30° . Найти:

- наклонную MB ;
- AB , если угол между наклонными равен 30° ;
- (н. о.) угол между проекциями наклонных.

Контрольная работа К-5

К-5-1.

Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с ребром, равным $b\sqrt{2}$. Середины ребер $A' B'$ и $B' C'$ отмечены точками соответственно K и M .

- Провести сечение через прямую KM и точку C .
- Найти две любые стороны этого сечения.
- Обосновать вид фигуры, получившейся в сечении.

Чему равен угол между KM и DC ?

г) (н.о.) Найти точку пересечения прямой BD' с плоскостью сечения.

К-5-2.

Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с ребром $2a$. Середины ребер AA' , $A' B'$, $C' D'$ отметим соответственно точками M , N , K .

- Провести сечение через точки M , N , K .
- Найти периметр этого сечения.
- Обосновать вид фигуры, получившейся в сечении.

Чему равен угол между NK и AC ? (Ответ пояснить.)

г) (н.о.) Найти точку пересечения прямой BD' с плоскостью сечения.

К-5-3.

Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с ребром, равным $2a\sqrt{2}$. Середины ребер AB и AD отметим соответственно точками K и M .

- Провести сечение через точки K , M и B' .
- Найти какие-нибудь две стороны этого сечения.
- Обосновать вид фигуры, получившейся в сечении. Найти угол между KM и $A'C'$. (Ответ пояснить.)
- (н.о.) Найти точку пересечения прямой $A'C$ с плоскостью сечения.

К-5-4.

Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с ребром, равным $4b$. Середины ребер $A'B'$, $B'C'$, AB отметим соответственно точками M , N и K .

- Провести сечение через точки M , N , K .
- Найти периметр этого сечения.
- Обосновать вид фигуры, получившейся в сечении. Чему равен угол между MK и DC' ? (Ответ пояснить.)
- (н.о.) Найти точку пересечения прямой $B'D$ с плоскостью сечения.

Контрольная работа К-6**К-6-1.**

1. Отрезок прямой AB разделен точкой C так, что $AC : CB = 2 : 3$. A' , B' , C' — проекции точек A , B , C на плоскость α .

- Найти $A'C'$, если $A'B' = 15$ м.
 - Найти CC' , если $AA' = 2$ м, $BB' = 3$ м.
2. а) Построить правильную шестиугольную пирамиду.
б) Провести в ней сечение через середину бокового ребра параллельно основанию пирамиды.

в) (н.о.) Доказать, что многоугольник, получившийся в сечении, подобен многоугольнику, лежащему в основании.

К-6-2.

1. A' , B' , C' — проекции на плоскость α точек A , B , C , лежащих на одной прямой. $A'C' : B'C' = 7 : 4$.

- Найти AB , если $AC = 21$ м.
 - Найти CC' , если $AA' = 4$ м, $BB' = 5$ м.
2. а) Построить правильную четырехугольную пирамиду.
б) Провести в ней сечение через середину ребра основания параллельно боковой грани.

в) (н.о.) Найти площадь сечения, если ребро основания равно 2 м и апофема пирамиды тоже 2 м.

К-6-3.

1. Отрезок AB разделен точкой C в отношении $3:4$.
 A', B', C' — проекции точек A, B, C на плоскость α .

а) Найти $A'B'$, если $B'C' = 24$ м.

б) Найти CC' , если $AA' = 8$ м, $BB' = 10$ м.

2. а) Построить правильную треугольную пирамиду.

б) Провести в ней сечение через середину бокового ребра параллельно основанию.

в) (н.о.) Чему будет равна площадь этого сечения, если площадь основания равна 12 м^2 .

К-6-4.

1. A', B', C' — проекции точек A, B, C , лежащих на одной прямой, на плоскость α . $A'C' = 5$ м, $A'B' = 2$ м.

а) Найти отношение $AB:BC$.

б) Найти AA' , если $BB' = 4$ м, $CC' = 5$ м.

2. а) Построить пирамиду $MABCD$, в основании которой прямоугольник $ABCD$, высота проходит через точку пересечения диагоналей основания.

б) Провести сечение через середину ребра AD параллельно боковой грани MDC .

в) (н.о.) Вычислить площадь этого сечения, если $AB = 2$ м, высота грани MDC равна 8 м.

Контрольная работа К-7

К-7-1.

Из вершины A треугольника ABC ($C = 90^\circ$) к его плоскости проведен перпендикуляр AM , равный $4\sqrt{3}$ м, $AC = 4$ м.

а) Найти расстояние от M до BC (с обоснованием).

б) Найти угол ACM .

в) Доказать, что $\angle ACM > \angle ABM$.

г) (н.о.) Найти расстояние от A до плоскости MBC .

К-7-2.

Из вершины A прямоугольника $ABCD$ восставлен к его плоскости перпендикуляр AK , равный 12 м. $AB = 5$ м.

а) Найти расстояние от K до BC (с обоснованием).

б) Найти значение какой-нибудь тригонометрической функции угла ABK .

в) Доказать, что $\angle ACK < \angle ABK$.

г) (н.о.) Найти расстояние от A до плоскости BKC .

К-7-3.

Из вершины B треугольника ABC ($C = 90^\circ$) к его плоскости проведен перпендикуляр BM , равный $\sqrt{3}$ м. $BC = 3$ м.

- а) Найти расстояние от M до AC (с обоснованием).
- б) Найти угол BMC .
- в') Доказать, что $\angle BMC < \angle BMA$.
- г) (н.о.) Найти расстояние от B до плоскости AMC .

К-7-4.

Из вершины B прямоугольника $ABCD$ восстановлен к его плоскости перпендикуляр BP , равный 40 м, $BC = 9$ м.

- а) Найти расстояние от P до CD (с обоснованием).
- б) Найти значение какой-нибудь тригонометрической функции угла BPC .
- в') Доказать, что $\angle BCP > \angle BDP$.
- г) (н.о.) Найти расстояние от точки B до плоскости CPD .

Контрольная работа К-8

К-8-1.

В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольник, в котором $AB < AD$. Две боковые грани пирамиды, проходящие через B , перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углами α и 2α . Высота пирамиды равна a .

а) Построить чертеж и отметить на нем линейные углы наклона боковых граней к основанию — α и 2α (обосновать отмеченные углы).

б) Найти два боковых ребра пирамиды.

в') Найти площадь боковой грани, наклоненной к основанию под углом α .

г) (н.о.) Доказать, что плоскость AMC наклонена к основанию под углом, большим 2α .

К-8-2.

В основании пирамиды — прямоугольный треугольник ABC ($C = 90^\circ$), в котором $AC > BC$. Высота пирамиды проектируется на середину гипотенузы треугольника ABC . Две боковые грани пирамиды наклонены под углами α и 4α .

а) Построить чертеж и отметить на нем линейные углы наклона боковых граней к основанию — α и 4α . Обосновать отмеченные углы.

б) Найти высоты боковых граней пирамиды, если высота пирамиды равна a .

в') Найти площадь боковой грани, наклоненной к основанию под углом α .

г) (н.о.) Доказать, что косинус угла отрицателен, если угол равен сумме двух плоских углов трехгранного угла с вершиной C и принадлежащих боковым граням данной пирамиды.

К-8-3.

В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = \angle D = 90^\circ$, $BC > CD$. Две боковые грани пирамиды, заключающие угол B , перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углами α и 3α .

а) Построить чертеж и на нем отметить линейные углы наклона боковых граней к основанию — α и 3α . Обосновать отмеченные углы.

б) Найти высоты боковых граней пирамиды, если высота пирамиды равна a .

в) Найти площадь боковой грани пирамиды, наклоненной к основанию под углом α .

г) (н.о.) Доказать, что плоскость MAC наклонена к основанию под углом, большим 3α .

К-8-4.

В основании пирамиды $MABCD$ — прямоугольник. Основание высоты лежит на середине меньшей стороны AB прямоугольника. Одна из боковых граней пирамиды наклонена к основанию под углом α , другая — под углом 5α .

а) Построить чертеж и на нем отметить линейные углы наклона боковых граней к основанию — α и 5α . Обосновать отмеченные углы.

б) Найти одно из меньших боковых ребер пирамиды, если высота пирамиды равна a .

в) Найти площадь боковой грани, наклоненной к основанию под углом α .

г) (н.о.) Доказать, что плоскость MBD наклонена к основанию под углом, большим 5α .

Контрольная работа К-9

К-9-1.

1. В пирамиде площадь основания равна 27 м^2 . Найти площадь сечения, перпендикулярного высоте пирамиды и делящего высоту в отношении $2 : 3$, считая от вершины пирамиды.

2'. В прямом параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ с высотой, равной $3\sqrt{3} \text{ м}$, стороны основания $AD = 15 \text{ м}$, $AB = 7 \text{ м}$, $\angle BAD = 60^\circ$.

а) Найти меньшую диагональ параллелепипеда.

б) (н.о.) Найти расстояние от AA' до $B'D$.

К-9-2.

1. В пирамиде площадь сечения, параллельного основанию, равна 18 м^2 . Найти площадь основания пирамиды, если

сечение делит высоту в отношении $3 : 4$, считая от вершины пирамиды.

2'. В прямом параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ с высотой, равной 24 м, стороны основания $AD = 3$ м, $DC = 5$ м, $\angle ADC = 120^\circ$.

а) Найти большую диагональ $A'C$ параллелепипеда.

б) (н.о.) Найти расстояние от DD' до $A'C$.

К-9-3.

1. В пирамиде площадь основания равна 32 м². Найти площадь сечения, параллельного основанию пирамиды и делящего высоту пирамиды в отношении $3 : 5$, считая от вершины пирамиды.

2'. В прямом параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ с высотой, равной 24 м, стороны основания $BC = 8$ м, $CD = 3$ м, $\angle BCD = 60^\circ$.

а) Найти меньшую диагональ (BD') параллелепипеда.

б) (н.о.) Найти расстояние от CC' до BD' .

К-9-4.

1. В пирамиде площадь сечения, перпендикулярного высоте пирамиды, равна 8 м². Найти площадь основания пирамиды, если сечение делит высоту пирамиды в отношении $2 : 1$, считая от вершины пирамиды.

2'. В прямом параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ с высотой, равной $\sqrt{39}$ м, стороны основания $AB = 5$ м, $BC = 16$ м, $\angle ABC = 120^\circ$.

а) Найти большую диагональ параллелепипеда AC' .

б) (н.о.) Найти расстояние от BB' до AC' .

Контрольная работа К-10

К-10-1.

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 м, а сторона основания 10 м.

а) Найти боковую поверхность пирамиды.

б) Провести сечение через ребро основания перпендикулярно противоположной боковой грани (без обоснования).

в) Доказать, что ребро основания перпендикулярно апофеме противоположной грани пирамиды.

г) (н.о.) Найти расстояние между ребром основания и апофемой противоположной боковой грани (без обоснования).

К-10-2.

В правильной треугольной пирамиде высота основания 3 м. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° .

а) Найти боковую поверхность пирамиды.

б') Провести сечение через ребро основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

в') Доказать, что ребро основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

г) (н.о.) Найти расстояние от ребра основания до противоположного ему бокового ребра пирамиды (без обоснования).

К-10-3.

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 24 м, а апофема 25 м.

а) Найти боковую поверхность пирамиды.

б') Провести сечение через ребро основания перпендикулярно противоположной боковой грани (без обоснования).

в') Доказать, что ребро основания перпендикулярно апофеме противоположной грани.

г) (н.о.) Чему равно расстояние между ребром основания и апофемой противоположной грани (без обоснования)?

К-10-4.

В правильной треугольной пирамиде ребро основания равно 3 м. Боковые грани наклонены к основанию под углом 30° .

а) Найти боковую поверхность пирамиды.

б') Провести сечение через ребро основания перпендикулярно противоположному боковому ребру (без обоснования).

в') Доказать, что ребро основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

г) (н.о.) Найти расстояние от ребра основания до противоположной боковой грани (без обоснования).

Контрольная работа К-11

К-11-1.

1. Каждое ребро прямого параллелепипеда равно 2 м, один из углов основания равен 60° . Найти объем параллелепипеда.

2. В правильной треугольной пирамиде боковая грань составляет с основанием угол α . Апофема пирамиды равна a .

а) Сделать чертеж.

б') Найти объем данной пирамиды.

в) (н.о.) Доказать, что угол между боковым ребром и основанием в этой пирамиде меньше α .

К-11-2.

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 4 см и составляет с основанием угол 30° . Найти объем пирамиды.

2. Основание призмы — правильный треугольник со стороной a . Проекция бокового ребра на основание равна высоте призмы. Боковое ребро призмы равно $a\sqrt{2}$.

а) Сделать чертеж.

б') Найти объем призмы.

в) (н.о.) Доказать, что площадь перпендикулярного сечения этой призмы меньше площади основания.

К-11-3.

1. Каждое ребро прямой призмы, в основании которой треугольник, равно 3 м. Найти объем призмы.

2. В основании пирамиды — квадрат. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углом α .

а) Сделать чертеж.

б') Найти объем пирамиды, если ее высота равна a .

в) (н.о.) Доказать, что двугранный угол при большем боковом ребре в этой пирамиде больше 90° .

К-11-4.

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены под углом 45° к основанию. Ребро основания равно 4 м. Найти объем пирамиды.

2. В основании призмы — равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), в котором $\angle A = \alpha$ и $BC = b$. A' проектируется в центр окружности, описанной около основания призмы. AA' наклонена к основанию тоже под углом α .

а) Сделать чертеж.

б') Найти объем призмы.

в) (н.о.) Найти площадь наибольшей боковой грани.

Контрольная работа К-12

К-12-1.

В цилиндр вписана правильная треугольная призма, сторона основания которой равна a . Диагональ боковой грани призмы составляет с основанием угол α .

а) Найти площадь боковой поверхности и объем цилиндра.

б') Найти угол между диагональю боковой грани призмы и осью цилиндра (с пояснением).

в) (н.о.) Чему равен угол α в данной задаче, если боковая поверхность цилиндра равна сумме площадей оснований?

К-12-2.

В цилиндр вписана призма, в основании которой квадрат. Диагональ этой призмы равна a и наклонена к основанию под углом α .

а) Найти площадь боковой поверхности цилиндра и его объем.

б') Найти угол между диагональю призмы и не пересекающей ее образующей цилиндра (ответ пояснить.)

в) (н.о.) Чему равен угол α в данной задаче, если площадь боковой поверхности цилиндра в два раза больше суммы площадей оснований цилиндра?

К-12-3.

В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Диагональ боковой грани равна m и составляет угол α с образующей цилиндра.

а) Найти площадь боковой поверхности и объем цилиндра.

б') Найти угол между диагоналями ED' и $A'B$ (ответ пояснить).

в) (н.о.) Чему равен угол α в данной задаче, если развертка боковой поверхности призмы — прямоугольник, у которого одна сторона в $2\sqrt{3}$ раза больше другой?

К-12-4.

В цилиндр вписана призма, в основаниях которой — прямоугольные треугольники ABC и соответственно $A'B'C'$ ($\angle C = \angle C' = 90^\circ$) с катетом a и противолежащим углом α . В боковой грани, проходящей через катет a , диагональ наклонена к основанию тоже под углом α .

а) Найти площадь боковой поверхности и объем цилиндра.

б') Найти угол между катетом AC и диагональю $C'B$ (ответ пояснить).

в) (н.о.) Чему равен угол α в данной задаче, если площадь боковой поверхности цилиндра будет в 3 раза больше суммы площадей оснований?

Контрольная работа К-13

К-13-1.

Высота конуса h , образующая наклонена к основанию под углом α .

а) Найти объем конуса.

б) Найти площадь боковой поверхности конуса.

в') Найти угол в развертке боковой поверхности конуса.

г) (н.о.) Какую часть высоты конуса составляет высота одного из вписанных в этот конус цилиндров, у которого боковая поверхность наибольшая?

К-13-2.

Образующая конуса равна a и наклонена к основанию под углом β .

а) Найти объем конуса.

- б) Найти площадь боковой поверхности конуса.
в') Найти угол в развертке боковой поверхности конуса.
г) (н.о.) Какую часть радиуса конуса будет составлять радиус одного из тех вписанных в этот конус цилиндров, у которого боковая поверхность наибольшая?

К-13-3.

Радиус основания конуса равен a и составляет с образующей угол α .

- а) Найти площадь боковой поверхности конуса.
б) Найти объем конуса.
в') Найти угол в развертке боковой поверхности конуса.
г) (н.о.) В каком отношении разделит высоту конуса верхнее основание такого вписанного в конус цилиндра, боковая поверхность которого наибольшая?

К-13-4.

В осевом сечении конуса угол при вершине равен 2β , а образующая конуса c .

- а) Найти площадь боковой поверхности конуса.
б) Найти объем конуса.
в') Найти угол в развертке боковой поверхности конуса.
г) (н.о.) В конус вписан цилиндр с наибольшей боковой поверхностью. В каком отношении окружность нижнего основания цилиндра разделит радиус основания конуса?

Контрольная работа К-14

К-14-1.

Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 30° к радиусу. Радиус сечения равен $\sqrt{3}$. Найти:

- а) поверхность и объем шара;
б) поверхность меньшего шарового сегмента;
в') объем шарового сектора, ограниченного меньшей сегментной поверхностью;
г) (н.о.) высоту правильного тетраэдра, вписанного в данный шар.

К-14-2.

Сечение, перпендикулярное диаметру шара, разделило диаметр в отношении $1 : 4$. Радиус сечения равен 4. Найти:

- а) поверхность и объем шара;
б) площадь поверхности меньшего шарового сегмента;
в') объем шарового сектора, ограниченного большей сегментной поверхностью;
г) (н.о.) ребро правильного октаэдра, описанного около данного шара.

К 14-3.

Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 30° к радиусу. Расстояние от центра шара до плоскости сечения равно 1. Найти:

- а) поверхность и объем шара;
- б) площадь поверхности большего шарового сегмента;
- в) объем шарового сектора, ограниченного большей сегментной поверхностью;
- г) (н.о.) ребро правильного октаэдра, вписанного в данный шар.

К-14-4.

Сечение, перпендикулярное диаметру шара, разделило диаметр в отношении $1:3$. Меньшая хорда, соединяющая один из концов диаметра с точкой окружности сечения, равна 2. Найти:

- а) поверхность и объем шара;
- б) площадь поверхности меньшего шарового сегмента;
- в) объем шарового сектора, ограниченного большей сегментной поверхностью;
- г) (н.о.) ребро правильного тетраэдра, описанного около данного шара.

Контрольная работа К-15

К-15-1.

1. В правильную треугольную пирамиду $МABC$ с апофемой a и двугранным углом при основании 2α вписан шар. Найти объем шара.

2'. Дан $\triangle ABC$, в котором $c \approx 3$ м, $a \approx 7$ м, $b \approx 8$ м. Найти угол A , затем угол C (с точностью до градуса).

К-15-2.

1. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, боковые ребра которой равны $2a$ и составляют с высотой пирамиды угол α . Найти площадь поверхности шара.

2'. Дан $\triangle ABC$, в котором стороны $a \approx 3$ м, $c \approx 8$ м, $B \approx 60^\circ$. Найти b и угол A (с точностью до градуса).

К-15-3.

1. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой a и двугранным углом при основании 2α вписан шар. Найти объем шара.

2'. Дан $\triangle ABC$, в котором $b \approx 5,0$ м, $A \approx 50^\circ$, $C \approx 70^\circ$. Найти a и c .

К-15-4.

1. В шар вписана правильная треугольная пирамида,

высота которой составляет с боковым ребром, равным $2b$, угол β . Найти поверхность шара.

2'. Дан ΔABC , в котором $a \approx 6,0$ м, $c \approx 4,9$ м, $A \approx 70^\circ$. Найти b и C (с точностью до градуса).

Контрольная работа К-16

К-16-1.

В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой апофема равна 2 и наклонена к основанию под углом 60° . Найти:

- а) объем конуса;
- б') в пирамиде площадь сечения, проведенного перпендикулярно высоте пирамиды и делящего высоту в отношении $2 : 3$ (считая от вершины).

К-16-2.

В правильную треугольную пирамиду вписан конус, у которого образующая наклонена к основанию под углом 45° . Высота конуса равна 1. Найти:

- а) объем пирамиды;
- б') площадь сечения пирамиды, проведенного параллельно боковой грани и проходящего через середину ребра основания.

К-16-3.

В конус вписана правильная треугольная пирамида, у которой апофема равна 4, а боковая грань наклонена к основанию под углом 60° . Найти:

- а) объем конуса;
- б') периметр сечения пирамиды, проведенного параллельно основанию и делящего боковое ребро в отношении $3 : 5$, считая от вершины.

К-16-4.

В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Боковое ребро пирамиды равно 2 и наклонено к основанию под углом 30° . Найти:

- а) объем конуса;
- б') периметр сечения пирамиды, параллельного боковой грани и делящего боковое ребро в отношении $1 : 2$, считая от вершины основания.

ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНАЦИОННЫМ БИЛЕТАМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Каждая задача билета содержит два вопроса («а» и «б»). Если ученик ответил только на вопрос «а», то он получает оценку «3» или «4» в зависимости от качества ответа по билету. Ученик, отвечающий на «б», должен обязательно ответить и на вопрос «б».

В каждом билете четыре задачи, одну из которых учитель может выбрать для экзаменационного билета. Как правило, третья и четвертая задачи повторяют соответственно первую и вторую, только некоторые величины, данные в первой и второй задачах в общем виде, заменены в третьей и четвертой частными значениями, например угол α — углом 60° .

Задачи с практическим содержанием, требующие от учащихся предварительных измерений, должны решаться с учетом требований, указанных в примечании 3, стр. 9.

К билету 1.

1. В правильной треугольной пирамиде боковые ребра наклонены к основанию пирамиды под углом α . Сторона основания равна $2a\sqrt{3}$. Найти:

- а) боковое ребро пирамиды;
- б) радиус описанного около пирамиды шара.

2. В правильной шестиугольной пирамиде боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Сторона основания равна $2a$. Найти:

- а) боковое ребро пирамиды;
- б) радиус шара, описанного около пирамиды.

3. В первой задаче положить $\alpha = 60^\circ$.

4. Во второй задаче положить $\alpha = 60^\circ$.

К билету 2.

1. Взять модель правильной треугольной пирамиды. Найти:

- а) объем одной из частей пирамиды, на которые рассека-

ет эту пирамиду плоскость, проходящая через ребро основания и середину бокового ребра;

б) объем вписанного в данную пирамиду шара.

2. Взять модель правильной четырехугольной пирамиды. Найти:

а) объем одной из частей пирамиды, на которые рассекает эту пирамиду плоскость, проходящая через диагональ основания и середину бокового ребра, не имеющего общей точки с взятой диагональю;

б) объем вписанного в данную пирамиду шара.

3. Взять модель правильной шестиугольной пирамиды. Найти:

а) объем одной из частей пирамиды, на которые рассекает эту пирамиду плоскость, пересекающая боковое ребро в его середине, проходящая через меньшую диагональ основания и дающая в сечении треугольник;

б) объем вписанного в данную пирамиду шара.

4. Взять модель правильной треугольной пирамиды. Найти:

а) объем одной из частей пирамиды, на которые рассекает эту пирамиду плоскость, параллельная основанию и проходящая через середину высоты пирамиды;

б) расстояние от вершины основания пирамиды до противоположной боковой грани.

К билету 3.

1. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 2α . Сторона основания равна $2a\sqrt{3}$. Найти:

а) апофему пирамиды;

б) радиус шара, вписанного в пирамиду.

2. В правильной шестиугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 2α . Сторона основания равна $2a\sqrt{3}$. Найти:

а) апофему пирамиды;

б) радиус шара, вписанного в пирамиду.

3. В задаче 1 положить $2\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить $2\alpha = 60^\circ$.

К билету 4.

1. В основании призмы AC' — равносторонний треугольник ABC . Вершина A' проектируется в центр основания

призмы. Высота призмы равна $a\sqrt{3}$ и составляет с боковым ребром угол α . Найти:

- а) сторону основания призмы;
- б) доказать, что одна из граней призмы — прямоугольник.

2. В основании параллелепипеда AC' — квадрат $ABCD$. Вершина A' проектируется в точку пересечения диагоналей квадрата, лежащего в основании параллелепипеда. Высота параллелепипеда $a\sqrt{2}$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом α .

- а) Найти сторону основания параллелепипеда.
 - б) Доказать, что одно из диагональных сечений — прямоугольник.
3. В задаче 1 положить $\alpha = 60^\circ$.
4. В задаче 2 положить $\alpha = 30^\circ$.

К билету 5.

1. В кубе AC' с ребром, равным $2\sqrt{2}$:

- а) провести сечение через вершины A и C и точку M , лежащую на середине ребра $A'B'$, и найти какие-нибудь две стороны сечения;

б) доказать, что полученное сечение можно описать окружностью.

2. В кубе AC' с ребром, равным 2:

- а) провести сечение через вершины A и B' и точку M , лежащую на середине DC' , и найти периметр сечения;

б) доказать, что в полученное сечение нельзя вписать окружность.

3. В кубе AC' с ребром, равным 2м:

- а) провести сечение через AD и середину $A'B'$ и найти периметр сечения;

б) доказать, что плоскость сечения наклонена к основанию под углом, большим 60° .

4. В кубе AC' с ребром, равным $2\sqrt{2}$:

- а) провести сечение через A' , D и C и найти периметр сечения;

б) доказать, что отрезок $A'C$ наклонен к основанию куба под углом, меньшим 45° .

К билету 6.

1. Дуга в осевом сечении шарового сегмента равна 4α ($4\alpha < 180^\circ$), а радиус шара — a .

- а) Найти высоту шарового сегмента.

б) Определить, какую часть поверхности шара составляет

площадь сегментной поверхности этого шарового сегмента, если $4\alpha = 120^\circ$.

2. Дуга в осевом сечении шарового сегмента равна 4α ($180^\circ < 4\alpha < 360^\circ$), а радиус шарового сегмента — a .

а) Найти высоту шарового сегмента.

б) Определить, во сколько раз поверхность шара, имеющего тот же радиус, что и данный шаровой сегмент, больше поверхности этого шарового сегмента, если $4\alpha = 240^\circ$.

3. Дуга в осевом сечении шарового сегмента равна 120° , а радиус шарового сегмента — a .

а) Найти высоту шарового сегмента.

б) Какую часть поверхности шара радиусом a составляет площадь сегментной поверхности этого шарового сегмента?

4. Дуга в осевом сечении шарового сегмента равна 240° , а радиус шарового сегмента — a .

а) Найти высоту шарового сегмента.

б) Во сколько раз поверхность шара, имеющего тот же радиус, что и данный шаровой сегмент, больше поверхности шарового сегмента?

К билету 7.

1. В основании пирамиды — квадрат со стороной a . Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углом α . Найти:

а) высоту пирамиды;

б) площадь боковой грани, наклоненной к основанию под углом α .

2. В основании пирамиды — прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены одна под углом α , а другая — под углом 2α . Высота пирамиды равна a . Найти:

а) площадь основания пирамиды;

б) площадь боковой грани, наклоненной к основанию под углом 2α .

3. В задаче 1 положить $\alpha = 45^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 30^\circ$.

К билету 8.

1. В пирамиде $MABC$ боковые грани наклонены к основанию под углом α . В основании пирамиды — прямоугольный треугольник ABC с катетом $BC = 2b$ и прилежащим острым углом α . Найти:

а) площадь боковой поверхности;

б) отношение объемов частей пирамиды, полученных от

пересечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро MB и биссектрису угла B в основании.

2. В пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом α . В основании пирамиды — ромб с высотой $2a$ и острым углом α . Найти:

- площадь боковой поверхности;
- расстояние от основания высоты пирамиды до боковых граней.

3. В задаче 1 положить $\alpha = 30^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 45^\circ$.

К билету 9.

1. В основании пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 3 м и 4 м. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α . Найти:

- объем пирамиды;
- расстояние от вершины меньшего угла основания пирамиды до противоположной боковой грани.

2. В пирамиду, в основании которой ромб со стороной $2a$ и острым углом α , вписан конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α . Найти:

- объем пирамиды;
- расстояние от вершины острого угла ромба до боковой грани пирамиды, проходящей через другую вершину острого угла ромба.

3. В задаче 1 положить $\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 45^\circ$.

К билету 10.

1. В усеченный конус вписан шар. Образующая конуса наклонена к основанию под углом 2α . Радиус шара равен a .

- Найти площадь боковой поверхности конуса.
- Найти объем этого усеченного конуса, если $2\alpha = 60^\circ$.

2. В усеченный конус вписан шар. Образующая конуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом 2α .

- Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.
- Найти объем усеченного конуса, если $2\alpha = 60^\circ$.

3. В усеченный конус вписан шар. Образующая конуса наклонена к основанию под углом 60° . Радиус шара равен a .

- Найти площадь боковой поверхности конуса.
- Найти объем этого усеченного конуса.

4. В усеченный конус вписан шар. Образующая корпуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом 60° .

а) Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

б) Найти объем усеченного конуса.

К билету 11.

1. В конус вписан шар. Радиус основания конуса равен a , образующая наклонена к основанию под углом 2α .

а) Найти объем шара.

б) Найти большую площадь поверхности шарового сегмента, отсекаемую от поверхности шара плоскостью, проходящей через окружность, по которой поверхность шара касается боковой поверхности конуса.

2. В конус вписан шар радиусом b . Образующая конуса наклонена к основанию под углом 2α .

а) Найти боковую поверхность конуса.

б) Найти меньшую поверхность шарового сегмента, отсекаемую от поверхности шара плоскостью, проходящей через окружность, по которой поверхность шара касается боковой поверхности конуса.

3. В задаче 1 положить $\alpha = 30^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 30^\circ$.

К билету 12.

1. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α , вписана правильная треугольная пирамида. Радиус основания конуса равен a .

а) Найти объем пирамиды.

б) Найти часть объема конуса, отсекаемую плоскостью боковой грани пирамиды, если $\alpha = 60^\circ$.

2. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α , вписана правильная четырехугольная пирамида. Радиус основания конуса равен a .

а) Найти объем пирамиды.

б) Найти часть объема конуса, отсекаемую плоскостью боковой грани пирамиды, если $\alpha = 45^\circ$.

3. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом 60° , вписана правильная треугольная пирамида. Радиус основания конуса равен a .

а) Найти объем пирамиды.

б) Найти часть объема конуса, отсекаемую плоскостью боковой грани пирамиды.

4. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом 45° , вписана правильная четырехугольная пирамида. Радиус основания конуса равен a .

- а) Найти объем пирамиды.
- б) Найти часть объема конуса, отсекаемую плоскостью боковой грани пирамиды.

К билету 13.

1. В основании прямой призмы ромб со стороной a и тупым углом 2α .

а) Найти угол наклона большей диагонали к основанию, если высота призмы $2a$.

б) Построить угол между большей диагональю и боковой гранью.

2. В основании прямой призмы AC' — равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = a$ и $\angle A = 2\alpha$. Боковое ребро призмы равно $2a$.

а) Найти угол между диагональю CB' боковой грани и основанием призмы.

б) Построить угол между этой диагональю и другой боковой гранью.

3. В задаче 1 положить $\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 60^\circ$.

К билету 14.

1. В шар вписана пирамида, боковые ребра которой составляют с высотой пирамиды угол α . В основании пирамиды прямоугольник со сторонами 12 м и 16 м.

а) Найти объем шара.

б) Доказать, что угол между противоположными боковыми гранями меньше угла 2α .

2. В шар вписана пирамида, боковые ребра которой составляют с высотой пирамиды угол α . В основании пирамиды равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным $2\sqrt{2}$.

а) Найти поверхность шара.

б) Доказать, что угол между боковыми гранями, проходящими через катеты основания, больше 90° .

3. В задаче 1 положить $\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 30^\circ$.

К билету 15.

1. Прямоугольный треугольник ABC с углом $A = \alpha$ вращается вокруг гипотенузы AB . Сторона $AC = a$.

а) Найти площадь поверхности вращения стороны AC вокруг прямой AB .

б) Найти объем тела вращения.

2. Треугольник ABC с углом $C = 2\alpha$ вращается вокруг стороны AB . Угол $A = \alpha$, сторона $AC = b$.

а) Найти площадь поверхности вращения стороны AC вокруг прямой AB .

б) Найти объем тела вращения.

3. В задаче 1 положить угол $\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить угол $\alpha = 45^\circ$.

К билету 16.

1. В правильной треугольной пирамиде, боковые ребра которой равны $2a$ и наклонены к основанию под углом α :

а) провести сечение через среднюю линию основания параллельно только одному боковому ребру;

б) найти площадь сечения.

2. В правильной треугольной пирамиде апофема равна $2a$ и боковые грани наклонены к основанию под углом α .

а) Провести сечение в пирамиде через среднюю линию основания параллельно двум боковым ребрам.

б) Найти площадь сечения.

3. В задаче 1 положить $\alpha = 30^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 30^\circ$.

К билету 17.

1. В правильную треугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены под углом 2α к основанию, вписан шар. Ребро основания пирамиды равно $2a\sqrt{3}$.

а) Найти поверхность шара.

б) В каком отношении центр шара делит высоту пирамиды?

2. В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены под углом 2α к основанию, вписан шар. Апофема пирамиды равна a .

а) Найти поверхность шара.

б) В каком отношении центр шара делит высоту пирамиды?

3. В задаче 1 положить $2\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить $2\alpha = 45^\circ$.

К билету 18.

1. В правильную треугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к основанию под углом α и апофема равна a .

а) вписать произвольный цилиндр;

б) найти высоту этого цилиндра, если осевое сечение его квадрат.

2. В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к основанию под углом α и апофема равна a :

- а) вписать произвольный цилиндр;
- б) найти диаметр этого цилиндра, если осевое сечение его квадрат.

3. В задаче 1 положить $\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 60^\circ$.

К билету 19.

1. В конус, образующая которого равна a и наклонена к основанию под углом α :

- а) вписать произвольную прямую треугольную призму;
- б) найти ребра этой призмы, если все ее ребра равны.

2. В конус, образующая которого равна a и наклонена к основанию под углом α :

- а) вписать произвольную четырехугольную призму;
- б) найти ребро этой призмы, если призма — куб.

3. В задаче 1 положить $\alpha = 60^\circ$.

4. В задаче 2 положить $\alpha = 45^\circ$.

К билету 20.

1. Взять модель прямоугольного параллелепипеда и найти:

а) объем одной из частей тела, на которые его делит плоскость, наклонная к основанию и проходящая через ребро основания и середину бокового ребра;

б) объем шара, описанного около этого прямоугольного параллелепипеда.

2. Взять модель прямоугольного параллелепипеда и найти:

а) объем одной из неравных частей тела, на которые его делит плоскость, проходящая через диагональ основания и середину бокового ребра;

б) расстояние от вершины основания, не принадлежащей сечению, до плоскости сечения.

3. Взять модель правильной шестиугольной призмы и найти:

а) объем одной из частей призмы, на которые рассекает эту призму плоскость, пересекающая боковое ребро в его середине, дающая в сечении треугольник и проходящая через меньшую диагональ основания;

б) площадь сечения, проходящего через наибольшую диагональ призмы и ребро основания, имеющего общую точку с этой диагональю.

4. Взять модель правильной треугольной призмы и найти:

а) объем одной из частей этой призмы, на которые ее делит плоскость, проходящая через ребро нижнего основания и вершину верхнего основания, не лежащую с этим ребром в одной грани;

б) найти объем шара, описанного около этой призмы.

К билету 21.

1. а) Найти площадь полной поверхности модели наклонной треугольной призмы.

б) Найти в этой наклонной треугольной призме один из двугранных углов между боковыми гранями.

2. а) Найти площадь полной поверхности модели наклонной четырехугольной призмы.

б) Найти в этой наклонной призме один из двугранных углов между боковыми гранями.

3. а) Найти площадь полной поверхности модели наклонной шестиугольной призмы.

б) Найти в этой наклонной призме один из двугранных углов при боковом ребре.

4. а) Найти площадь полной поверхности модели наклонной призмы, в основании которой неправильный многоугольник.

б) Найти в этой наклонной призме один из двугранных углов при боковом ребре призмы.

ОТВЕТЫ

Тренировочные работы

Т-1. Т-1-1. 2. 0, -4, -12; $a_7 = -84$. 3') 13; 4) $2n-3$. Т-1-2. 1) -3, 0, 7; $a_8 = 52$; 3) 24; 4) n^2-1 . Т-1-3. 2. 1, 0, -1, 2, -3; $a_9 = -7$. 3. 1, 5. 4. $\frac{n-3}{2}$. Т-1-4. 1. а) 0, 2, 8; $a_5 = 32$; б) 98. Т-1-5. 2. а) 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{25}{4}$; $a_6 = \frac{49}{6}$; б) $\frac{625}{24}$. Т-1-6. 1. а) 3, 0, -3; $a_5 = -81$; б) -192. Т-1-7. 1. 2, -2, 2, -2; $a_{10} = -2$; 3) 42. 4) $n(n-1)$. Т-1-8. 2. 1) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, 2; $a_5 = \frac{26}{7}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{n+1}{2n}$.

Повыш. сложн. к Т-1. 1. а) 1, 4, 7, 10, 13; $a_n = 3n-2$; б) 2, 5, 8, 11, 14; $a_n = 3n-1$. 2. 0, 1, 2, 3, 4. 3. а) $\frac{2^n}{n+1}$; б) $\frac{n^2}{n+3}$.

Т-2. Т-2-1. 2. Ограниченная снизу, сверху, немонотонна, предела не имеет; 3. $\frac{n-3}{n}$. Т-2-2. 2. Ограниченная снизу, сверху, монотонна, имеет предел, равный -1; 3. n^2+1 . Т-2-3. 2. $6\frac{1}{6}$, не имеет. 3. Да. 4. $\frac{n^2+1}{4}$. Т-2-4. 2. а) 27; б) 117, $n=37$. Т-2-5. 1. Да. Т-2-6. 1. а) 49; б) нет; в) да. Т-2-7. а) 2, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{9}$; б) да, убывающая; в) да. Т-2-8. 1. а) 12; б) $a_{18} = 20$, $a_{20} = -31$; в) $(n+2)(-1)^n$.

Повыш. сложн. к Т-2. 1. $n = 30000$. 2. $n = 37499$. 3. Нет. 4. а) да, б) нет. 5. $\frac{n+10}{4}$. 6. $\frac{n(n+4)}{2n+1}$.

Т-3. Т-3-1. 1. а) 0; б) 5. 2. $2\sqrt{2}\pi$. 3. а) 0, $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{6}$, $a_5 = \frac{2}{5}$;

б) да, возрастающей; в) да. Т-3-2. 1. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{n+4}{4n}$; в) да, $n=25$. 2. а) 0, б) $\frac{2}{5}$. Т-3-3. 2. а) $\frac{15}{17}$; б) $\frac{2n-1}{2n+1}$; в) нет; 3. 4πм. Т-3-4. 1. Да, убывающая. 2. а) 1, б) 0. 3. 10πм. Т-3-5. 1. а) $\frac{17}{24}$; б) да, $n=25$. 2. а) $4\frac{1}{2}$; б) 0. 3. 64 πм². Т-3-6. 1. а) $\frac{40}{12} = \frac{10}{3}$; б) да, $n=46$. 2. а) 1; б) 0. 3. 2; 4. Т-3-7. 1. Да, возрастающая. 2. -1. 3. $C_{оп} = 8\pi\sqrt{2}$ м; $C_{вп} = 8\pi$ м. Т-3-8. 1. -1. 2. а) $2\sqrt{3}$ м; б) $3\sqrt{3}$ м². 3. Да.

Повыш. сложн. к Т-3. 1. а) 1; б) 2; в) 1; 2. $\frac{47}{552}$;

$$\frac{2k+11}{(k+5)(k+6)}.$$

Т-4. Т-4-1. 1. а) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{3\pi a^2}{4}$; в) $2\pi a$. 2. 1. Т-4-2. 1. а) $3a^2\sqrt{3}$; б) πa^2 ; в) $4\pi a$. 2. $\frac{8\pi}{3}$. Т-4-3. 1. а) 4π м²; б) 2π м²; в) 2π м. 2. $\frac{7\pi a}{18}$. Т-4-4. 1. а) $\frac{64}{\pi}$ м²; б) $\frac{48\sqrt{3}}{\pi^2}$ м². 2. $\frac{3}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$. Т-4-5. 1. а) 12π м²; б) 8π м; в) $24\sqrt{3}$ м²; 2. $\frac{360^\circ}{\pi}$. Т-4-6. 1. а) $\frac{25}{4\pi}$ м²; б) $3\frac{7}{36}$ м; в) $\frac{5\sqrt{3}}{2\pi}$ м. Т-4-7. 1. а) $4\sqrt{2}\pi$ м; б) $1,6$ м², в) $\frac{17\sqrt{2}\pi}{90}$ м. Т-4-8. 1. а) $4\pi\sqrt{2}$ м; б) 8π м²; в) 4π м², $2(\pi-2)$ м².

Повыш. сложн. к Т-4. 1. $2\pi\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{5}\pi\right)$. 2. 20° . 3. 11,25м; 4. 2π м. 5. 1м.

Т-5. (I серия). Т-5-1. 3. $a=24$. Т-5-2. 3. $b=42$. Т-5-3. 3. $a=19$. Т-5-4. 3. $b=33$. Т-5-5. 3. $c=41$. Т-5-6. 3. $a=23$. Т-5-7. 3. $b=14$. Т-5-8. 3. $c=16$.

Т-5. (II серия). Т-5-1. а) $b=15$, $c=21$; б) 13. Т-5-2. $a=41$, $c=29$; б) 27. Т-5-3. а) $a=19$, $b=75$; б) 9,1. Т-5-4. а) $b=32$, $c=26$; б) 17. Т-5-5. а) $b=8,5$, $c=2,4$; б) 1,9. Т-5-6. а) $a=3,5$, $c=4,8$; б) 4,4. Т-5-7. а) $a=9,6$, $b=24$; б) 14. Т-5-8. а) $a=5,2$, $c=4,9$; б) 2,7.

Повыш. сложн. к Т-5. 1. 86. 2. $a=52,5$ см, $b=134$ см, $H=41,4$ см. 3. $AB=1100$ м. 4. $MN=69$ м.

Т-6. Т-6-1. а) $A=24^\circ$, $B=31^\circ$, $C=125^\circ$; б) 4,9м. Т-6-2. а) $a=6,7$ м, $B=36^\circ$; б) 2,8м. Т-6-3. а) $b=6$ м, $A=44^\circ$; б) 4,2. Т-6-4. а) $C=25^\circ$, $B=53^\circ$, $A=102^\circ$; б) 18π м². Т-6-5. а) $b=8,2$ м, $A=47^\circ$; б) 6,1м. Т-6-6. а) $A=26^\circ$, $B=30^\circ$, $C=124^\circ$; б) 30π м².

Т-6-7. а) $C = 42^\circ$, $A = 48^\circ$, $C = 90^\circ$; б) 55 м^2 . Т-6-8. а) $1,7 \text{ м}$ и $6,9 \text{ м}$; б) 54° .

Повыш. сложн. к Т-6. 1. $C_1 = 46^\circ$ или $C_2 = 134^\circ$, $b_1 = 5,1 \text{ м}$ или $b_2 = 2,4 \text{ м}$. 2. $a_1 = 8,2 \text{ м}$, $B_1 = 70^\circ$ или $a_2 = 4,8 \text{ м}$, $B_2 = 110^\circ$. 3. $A = 90^\circ$, $c = 8 \text{ м}$. 4. $A = 56^\circ$, $B = 124^\circ$, $C = 144^\circ$, $D = 36^\circ$. 5. $4,8 \text{ м}$. 6. 7 м .

Т-7. Т-7-1. $\frac{b}{\sin \alpha}$. Т-7-2. $a \sin 3\alpha$. Т-7-3. $\frac{a \sin \alpha}{\sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha}$.

Т-7-4. $\frac{a \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$. Т-7-5. $1,7 \text{ м}$. Т-7-6. 34° . Т-7-7. $4,2 \text{ м}$. Т-7-8. $3,3 \text{ м}$.

Повыш. сложн. к Т-7. 1. 5 м , 7 м , 8 м . 2. 120° . 4. 30° , 60° ; 5. Дуга радиусом 4 дм

Т-9. Т-9-1. 2. а) $\frac{4}{\sqrt{3}}$, 4; б) $\frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{4 - \sqrt{3}}$. Т-9-2.

2. а) 3 м ; б) $3\sqrt{2} \text{ м}$; в) $\sqrt{30 - 18\sqrt{2}} \text{ м}$. Т-9-3. 2. а) $\sqrt{2} \text{ м}$,

$2\sqrt{2} \text{ м}$; б) $\sqrt{14} \text{ м}$. Т-9-4. 2. а) $\sqrt{3} \text{ м}$, 2 м ; б) $\sqrt{13} \text{ м}$. Т-9-5.

1. а) $BC \parallel \text{пл. } \alpha$ и $B'C' \parallel AD$ или сольется с AD ; б) трапеция или отрезок. Т-9-6. 1. а) $B'C' \parallel AD$ или сольются, $BC \parallel \text{пл. } \alpha$; б) параллелограмм или отрезок. Т-9-7. 1. а) есть; б) да; в) нет. Т-9-8. 1. а) нет; б) да; в) нет.

Повыш. сложн. к Т-9. 6. а) 2 м . 7. $AB = 2\sqrt{3} \text{ м}$, $AC = 2 \text{ м}$. 8. $\sqrt{3}$.

Т-10. Т-10-1. в) 4 м^2 . Т-10-2. в) 1 м^2 . Т-10-3. в) 90° . Т-10-5. б) 45° . Т-10-6. в) 16 м^2 .

Повыш. сложн. к Т-10. 2. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \text{ м}$. 4. $2(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \text{ м}$. 6. $12\sqrt{2} \text{ м}$. 8. Сечение—треугольник или четырехугольник.

Т-11. Т-11-1. 1. а) 5 м ; б) $5,5 \text{ м}$. 2. Ромб, параллелограмм, квадрат, прямоугольник, отрезок. Т-11-2. 1. а) $6,5 \text{ см}$; б) $5,6 \text{ см}$; в) квадрат, прямоугольник, ромб, параллелограмм, отрезок. Т-11-3.

а) $3,5 \text{ м}$; б) 3 м . Т-11-4. а) 7 м ; б) $6\frac{1}{3} \text{ м}$. Т-11-5. а) 6 м ; б) $7\frac{1}{3} \text{ м}$.

Т-11-6. б) 2 см ; в) 3 см . Т-11-7. б) 2 см ; в) $1\frac{1}{3} \text{ см}$. Т-11-8. б) да.

Повыш. сложн. к Т-11. 1. 8 м . 2. $DD' = 12 \text{ м}$, $EE' = 10 \text{ м}$, $FF' = 8 \text{ м}$. 4. Да, если катет параллелен плоскости α ; нет, если гипотенуза параллельна плоскости α . 5. Да, если проектирующие прямые не перпендикулярны плоскости α .

Т-12. Т-12-1. 1. 16 м ; 2. 1 м . Т-12-2. 10 м . Т-12-3. 1. 35 м ; 2. 9 м . Т-12-4. 5 м . Т-12-5. 40 см . Т-12-6. 18 см . Т-12-7. 9 м . Т-12-8. а) 14 м ; б) 2 м .

Повыш. сложн. к Т-12. 1. $1 : 1 : 1$. 2. 10 см , 25 см . 3. 4 м , $4\sqrt{3} \text{ м}$.

Т-13. Т-13-1. а) $5\sqrt{5} \text{ м}^2$, 9 м^2 ; б) $2,4 \text{ м}$; в) $\text{tg } MDB = \frac{4}{\sqrt{29}}$

Т-13-2. а) 300 м^2 ; б) $6,72 \text{ м}$. Т-13-3. а) $6\sqrt{2} \text{ м}^2$; б) $\frac{6\sqrt{2}}{5} \text{ м}$. Т-13-4.

а) $5\sqrt{3} \text{ м}$; б) $2,4 \text{ м}$. Т-13-5. б) $2\sqrt{3} \text{ м}$, 2 м ; в) $\sqrt{7} \text{ м}$. Т-13-6.
а) $3\sqrt{2} \text{ м}$; б) 7 м . Т-13-7. а) $\sqrt{13} \text{ см}$; б) $2\sqrt{3} \text{ см}$. Т-13-8. а) 13 м ;
б) $4\frac{8}{13} \text{ м}$.

Повыш. сложн. к Т-13. 1. $4a$, $5a$, $3a$. 2. a , $2a$, $a\sqrt{13}$.
4. $4,8 \text{ м}$. 5. $1:2$.

Т-14. Т-14-1. 1. б) 7 м . Т-14-2. 1. б) $1,5 \text{ м}$. Т-14-3. 1. б) 1 м .
Т-14-4. 1. 6 м , 4 м^2 . Т-14-5. а) 11 м ; б) $14,4 \text{ м}$; в) $\sin DCA = \frac{12}{13}$.

Т-15. Т-15-1. 1. $2,5$; 1 ; $H_1=2,4$, $H_2=4$, $H_3=3$. Т-15-2. 1. $H=$
 $=2 \text{ м}$, $r=1 \text{ м}$, $S_{\diamond}=8 \text{ м}^2$. Т-15-3. 1. $H=1 \text{ м}$, $S_{\square}=4 \text{ м}^2$, $5:3$.
Т-15-4. 1. $\sqrt{3} \text{ м}$, $5\sqrt{2} \text{ м}^2$. Т-15-5. 1. $10\sqrt{3} \text{ м}^2$, $\sqrt{19} \text{ м}$. Т-15-6.
б) $18\text{tg } \alpha$, $30\text{tg } \alpha$, $\frac{24}{\cos \alpha}$. Т-15-7. б) $8\text{tg } \alpha$, $\frac{9}{2}\text{tg } 3\alpha$, $\frac{6}{\cos \alpha}$, $\frac{6}{\cos 3\alpha}$.
Т-15-8. 1. 14 м , $2\sqrt{19} \text{ м}$. 2. б) 1 м , $\sin \alpha$.

Повыш. сложн. к Т-15. 1. 98° . 68° , 127° . 2. Q . 3. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 4. 45° .

Т-16. Т-16-1. 1. Нет. Т-16-2. 1. Да. 2. $\frac{5}{\sin \alpha}$. Т-16-3.

1. $\frac{10a}{\sin 3\alpha}$. 2. $H=12 \text{ м}$, $R=8\frac{1}{8} \text{ м}$, $r=4 \text{ м}$. Т-16-4. а) $2\sqrt{2} \text{ м}$.
Т-16-5. а) 2 м . Т-16-6. а) $4\sqrt{2} \text{ м}$. Т-16-7. а) $2\sqrt{2} \text{ м}$. Т-16-8. а) 45° ;
б) 8 м .

Т-17. Т-17-1. а) 8 м , $\frac{15\sqrt{3}}{14} \text{ м}$. Т-17-2. а) 10 м , $\frac{12\sqrt{3}}{7} \text{ м}$. Т-17-3

1. $3\cos \alpha$, $4\cos \alpha$, $5\sin \alpha$. 2. $a\sqrt{3}$, $2a$. Т-17-4. 1. 1152 м^3 . 2. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$,
 a , $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Т-17-5. 1. а) 14 м ; б) $\frac{20\sqrt{3}}{13} \text{ м}$. 2. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $\frac{a}{3}$,
 $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Т-17-6. 1. а) 14 м ; б) $\alpha = \arcsin \frac{5}{14}$. 2. $\sqrt{2} \text{ м}$, 2 м , 8 м^2 .

Т-17-7. а) 20 м ; б) $\frac{40\sqrt{3}}{19} \text{ м}$. Т-17-8. 1. а) 13 м , б) $\arcsin \frac{6\sqrt{3}}{13}$
2. $\frac{a}{3}$, $a\sqrt{3}$.

Повыш. сложн. к Т-17. 1. $3\sqrt{5} \text{ м}$. 2. $4\sqrt{3} \text{ м}^2$. 4. а) 2 см ;
б) 2 см ; в) $\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ см}$.

Т-18. Т-18-1. 1. а) 32 м^2 , б) $16\sqrt{2} \text{ м}$; 2. 8 м^3 . Т-18-2. а) $\frac{9}{4} a^2$; б) $\frac{49}{25} a^2$. Т-18-3. а) $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ м}^2$; б) $\frac{25\sqrt{3}}{16} \text{ м}^2$. Т-18-4. 1. а) 36 см^2 ; б) 24 см . 2. 1 м. Т-18-5. 1. 7 м , $\sqrt{97} \text{ м}$. 2. а) 9 см^2 ; б) 12 см . Т-18-6. 1. а) 3 м ; б) 3 м . 2. 1 : 2. Т-18-7. 1. 1 : 36. 2. а) 5 м . Т-18-8. 1. а) 4 : 1, считая от вершины; б) 16 см . 2. 4 м^2 .

Повыш. сложн. к Т-18. 1. Указание: взять, например, правильную четырехугольную усеченную пирамиду с произвольными ребрами основания, например $2a$ и $4a$. 3. а) нет; б) да; в) нет. 4. 9 м^2 .

Т-19. Т-19-1. а) $54\sqrt{3} \text{ м}^2$; б) $54\sqrt{3} \text{ м}^2$. Т-19-2. а) $\frac{85\sqrt{3}}{2} \text{ м}^2$; б) $\frac{85\sqrt{3}}{2} \text{ м}^2$. Т-19-3. а) 128 м^2 ; б) 128 м^2 . Т-19-4. $54(\sqrt{3} + 2) \text{ м}^2$. Т-19-5. а) $64(\sqrt{3} + 4) \text{ м}^2$. Т-19-6. $63\sqrt{3} \text{ м}^2$. Т-19-7. а) $4(1 + 2\sqrt{6}) \text{ м}^2$. Т-19-8. а) $54\sqrt{3} \text{ м}^2$.

Повыш. сложн. к Т-19. 1. $6\sqrt{3}(19 + 2\sqrt{13}) \text{ м}^2$. 2. $16\sqrt{3}(3 + \sqrt{5}) \text{ м}^2$. 3. $8(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ м}^2$. 4. $18\sqrt{3}(7 + 2\sqrt{13}) \text{ м}^2$.

Т-20. Т-20-1. 1. $45\sqrt{3} \text{ м}^2$. 2. 60 м^2 . Т-20-2. 1. 624 м^2 . 2. $(6 + 4\sqrt{3}) \text{ м}^2$. Т-20-3. 1. 75 м^2 . 2. $4\sqrt{3} \text{ м}$, 2 м , 4 м . Т-20-4. 1. $60\sqrt{3} \text{ м}^2$. 2. $9\sqrt{7} \text{ м}^2$. Т-20-5. 1. 24 м^2 . 2. $16\sqrt{2} \text{ м}^2$. Т-20-6. $(5\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) \text{ м}^2$. Т-20-7. 1. $216\sqrt{6} \text{ м}^2$. 2. $4(1 + \sqrt{2}) \text{ м}^2$. Т-20-8. $84(\sqrt{2} + 3) \text{ м}^2$.

Повыш. сложн. к Т-20. 1. $9(3\sqrt{3} + 3\sqrt{7} + 4) \text{ м}^2$. 2. 96 м^2 . 3. $9(4 + \sqrt{6}) \text{ м}^2$. 4. $18(6 + \sqrt{7}) \text{ см}^2$.

Т-21. Т-21-1. а) $20 \sin \alpha \text{ м}^3$; б) 12 м^3 . Т-21-2. а) $2\sqrt{5} \sin \alpha \text{ м}^3$; б) 4 м^3 . Т-21-3. а) $12\sqrt{3} \text{ м}^3$; б) $6\sqrt{3} \text{ м}^3$. Т-21-4. а) $2\sqrt{3} a^2 b \sin 2\alpha$; б) $4a^2 \sin 2\alpha \sqrt{b^2 - 4a^2 \cos^2 \alpha}$. Т-21-5. а) $\frac{\sqrt{3} a^2 b \sin \alpha}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \sqrt{b^2 - a^2}$. Т-21-6. 1. $2a^3 \sin \alpha$, $8a^2$. 2. $27\sqrt{3} \text{ м}^2$, $12\pi \text{ м}$. Т-21-7. а) $2\sqrt{39} \text{ м}^3$; б) 12 м^3 . Т-21-8. а) 900 м^2 , 2400 м^3 ; б) 67° .

Повыш. сложн. к Т-21. 1. 14 м^3 . 2. $\frac{3}{2} \text{ м}^3$. 3. $8\sqrt{3} \text{ м}^3$. 4. $20\sqrt{5} \text{ м}^3$ или $10\sqrt{5} \text{ м}^3$.

Т-22. Т-22-1. 1. $a^3 \sqrt{3} \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$. 2. $2\sqrt{3} \text{ м}^2$. Т-22-2. 1. $\frac{a^3 \sin 2\alpha \cos \alpha}{3}$. 2. $\frac{27}{2} \text{ м}^3$. Т-22-3. а) $\frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ м}^3$; б) 8 м^2 . Т-22-4. 1. $\frac{4a^3 \sqrt{3}}{3}$, $8a^2$. 2. $\frac{a}{2 \cos \alpha}$. Т-22-5. 1. $\frac{4\sqrt{3}}{3} a^3 \sin^2 \alpha$.

$$2. \frac{a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{4}. \quad \text{T-22-6. } 1. \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{8}. \quad 2. \frac{a \sqrt{2}}{2}. \quad \text{T-22-7. } 1. \frac{2a^3 \sin^2 \alpha}{3}.$$

$$2. 240 \text{ м}^2, 20 \frac{1}{24} \text{ м.} \quad \text{T-22-8. } 1. \text{ а) } \frac{27}{2} \operatorname{tg} \alpha \text{ м}^3; \text{ б) } \frac{9 \sqrt{3}}{2 \cos \alpha} \text{ м}^2. \quad 2. 12,5 \text{ м.}$$

Повыш. сложн. к Т-22. 1. $\frac{4a^3 \sqrt{3}}{27}$. 2. $\frac{4}{3} \text{ м.}$ 3. 12 м^3 .

4. $V_{\text{н}} : V_{\text{в}} = (\sqrt{2} - 1) : 1$ 5. Ближе к меньшему основанию, $1 : \sqrt{2}$, считая от верхнего основания.

Т-23. Т-23-1. $9 \sqrt{3} \text{ м}^2, \frac{9 \sqrt{2}}{4} \text{ м}^3$. Т-23-2. $8 \sqrt{3} \text{ м}^2, \frac{8 \sqrt{2}}{3} \text{ м}^3$.

Т-23-3. $12 \sqrt{3} \text{ м}^2, 2 \sqrt{6} \text{ м}^3$. Т-23-4. $\frac{32 \sqrt{3}}{3} \text{ м}^2, \frac{64 \sqrt{6}}{27} \text{ м}^3$. Т-23-5.

$2 \text{ м}, \frac{2 \sqrt{2}}{3} \text{ м}^3$. Т-23-6. $3 \text{ м}, 9 \sqrt{2} \text{ м}^3$. Т-23-7. $16 \sqrt{6} \text{ м}^3, 48 \sqrt{3} \text{ м}^2$.

Т-23-8. $8 \sqrt{6} \text{ м}^3, 24 \sqrt{3} \text{ м}^2$.

Повыш. сложн. к Т-23. 2. 90° . 3. а) $2 : 1$; б) $2 : 1$. 4. а) $\frac{4a^2}{3}$;

б) $\frac{2a^3 \sqrt{2}}{27}$.

Т-24. Т-24-1. 1. а) $\frac{2 \sqrt{3}}{3} \text{ м}$; б) 1 м . Т-24-2. а) $4 \sqrt{6} \text{ м}$; б) $2 \sqrt{3} \text{ м}$.

Т-24-3. а) $\frac{a}{\cos \alpha}$; б) $\frac{a}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$. Т-24-4. а) a ; б) $a \sqrt{6}$. Т-24-5.

в) $\frac{a \cos \alpha}{2}$ Т-24-6. в) $\frac{3}{4}$. Т-24-7. а) $2 \sqrt{2} \text{ м}$; б) 60° . Т-24-8.

в) $\frac{2 + 3 \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha}$

Повыш. сложн. к Т-24. 1. $3\pi(\sqrt{3} - 1)$. 2. $2\pi \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

3. а) 5 м ; б) 6 м .

Т-25. Т-25-1. $V_{\text{н}} = \frac{4\pi a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{9}$; $S_{6. \text{н}} = \frac{4\pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{3}$; $V_{\text{нпр}} =$

$= \frac{a^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{9}$. Т-25-2. $V_{\text{н}} = \frac{\pi a^2 b}{\sin^2 \alpha}$; $S_{6. \text{н}} = \frac{2\pi ab}{\sin \alpha}$;

$V_{\text{нпр}} = a^2 b \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ Т-25-3. $V_{\text{н}} = 8\pi \text{ м}^3$; $S_{6. \text{н}} = 8\pi \text{ м}^2$; $V_{\text{нпр}} = 4\sqrt{3} \text{ м}^3$.

Т-25-4. $V_{\text{н}} = \frac{14\pi a^3 \sqrt{7}}{3 \sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha$; $S_{6. \text{н}} = \frac{28\pi a^2 \operatorname{tg} \alpha}{3}$; $V_{\text{нпр}} = a^3 \sqrt{7} \operatorname{tg} \alpha$.

Т-25-5. $V_{\text{н}} = \frac{4\pi a^3}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$; $S_{6. \text{н}} = \frac{8\pi a^2}{\sin 2\alpha}$. Т-25-6. $V_{\text{н}} = 2\pi a^3 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \times$

$$\times \cos \alpha; S_{6. \text{ц}} = 4\pi a^2 \cos \alpha. \text{ Т-25-7. } V_{\text{ц}} = 27\pi \text{ м}^3; S_{6. \text{ц}} = 18\pi \text{ м}^2; V_{\text{пр}} = \\ = \frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ м}^3. \text{ Т-25-8. } V_{\text{ц}} = \frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}; S_{6. \text{ц}} = \frac{2\pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{3}}.$$

Повыш. сложн. к Т-25. 1. $\pi : 2\sqrt{3}$. 2. $4\pi\sqrt{2} \text{ м}^3$. 3. $135\pi \text{ м}^3$.
4. $\frac{351\pi\sqrt{3}}{32} \text{ м}^3$.

Т-26. Т-26-1. а) $\frac{\pi a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{3}$, $\pi a^2 \cos \alpha$; б) $360^\circ \cdot \cos \alpha$.

Т-26-2. а) $\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}$, $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha}$; б) $360^\circ \cdot \cos \alpha$. Т-26-3. а) $\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3}$, $\frac{\pi a^2}{\sin \alpha}$; б) $360^\circ \cdot \sin \alpha$. Т-26-4. а) $\frac{\pi a^3}{12 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$, $\frac{\pi a^2}{2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$;

б) $360^\circ \cdot \cos \alpha$. Т-26-5. а) $\frac{4\pi a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}$, $2\pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}$;

б) $a^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Т-26-6. а) $\frac{2\pi a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}$, $\pi \sqrt{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}$;

б) $\frac{4a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}$. Т-26-7. а) $\frac{7\pi a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{27}$, $\frac{\pi a^2}{\cos \alpha}$; б) $\frac{7a^3 \operatorname{tg} \alpha}{12}$.

Т-26-8. а) $\frac{13\pi a^3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{6}$, $\frac{4\pi a^2}{\cos \alpha}$; б) $\frac{13a^3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{3}$.

Повыш. сложн. к Т-26. 1. $\frac{4\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{3(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, $\frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

2. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2} \sin 2\alpha}{3(1 + \sin^2 \alpha) \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}$, $\frac{2\pi a^2 \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$. 3. $\pi \text{ м}^3$, $2\pi \sqrt{3} \text{ м}^2$.

4. $\frac{\pi \sqrt{35}}{24} \text{ м}^3$, $\frac{3\pi}{2} \text{ м}^2$.

Т-27. Т-27-1. 1. 4 м. 2. 3 м. Т-27-2. 1. 4,5 м. 2. $4\pi \operatorname{ctg}^2 \alpha$, $\frac{2}{\sin \alpha}$.

Т-27-3. 1. $2a \cos \alpha$. 2. $4a$. Т-27-4. 1. $AD = 2\sqrt{15} \text{ м}$, $BD = 2\sqrt{21} \text{ м}$. 2. 4 м. Т-27-5. 1. 4 м. 2. 3 м. Т-27-6. 1. 6 м. 2. а) 6 м; б) $2\sqrt{3} \text{ м}$.

Т-27-7. 1. $a\sqrt{1 + 9\sin^2 \alpha}$. 2. а) 7 м; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ м}$. Т-27-8. 1. 5 м.

2. $2\sqrt{3} \text{ м}$, $2\sqrt{3} \text{ м}$.

Повыш. сложн. к Т-27. 2. $4a \sin \alpha$, $a \sin 2\alpha$. 3. 14 дм, $75\pi \text{ дм}^2$, $27\pi \text{ дм}^2$.

Т-28. Т-28-1. 1. $\frac{4\pi a^3}{3 \sin^3 \alpha}$, $\frac{4\pi a^2}{\sin^2 \alpha}$. 2. $\frac{4\pi a^3}{3 \sin \alpha}$. 3. $4\pi a^2 \cos \alpha$.

4. $\frac{4\pi a^3 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha}{3}$. Т-28-2. 1. а) $\frac{500}{3} \pi \text{ м}^3$; б) $60\pi \text{ м}^2$; в) $100\pi \text{ м}^3$.

2. $2\sqrt{10}$ м. Т-28-3. 1. $\frac{4\pi a^3}{3 \sin^3 \alpha}$, $\frac{4\pi a^2}{\sin^2 \alpha}$. 2. $\frac{4\pi a^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \sin \alpha}$.
3. $4\pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha$. 4. $\frac{4\pi a^3 \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha}{8}$. Т-28-4. а) $\frac{256}{3} \pi \text{ м}^3$;
- б) $16\pi \text{ м}^2$; в) $\frac{64}{3} \pi \text{ м}^3$. Т-28-5. 1. $4\pi a^3 \sqrt{3}$, $12\pi a^2$. 2. $6\pi a^3$. 3. $3\pi a^2 \sqrt{3}$.
4. $1,5\pi a^3$. Т-28-6. а) $\frac{32}{9} \pi \text{ м}^3$; б) $12\pi \text{ м}^2$; в) $\frac{8}{3} \pi \text{ м}^3$. Т-28-7. 1. $16\pi a^2$,
- $\frac{32\pi a^3}{3}$. 2. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$. 3. $4\pi a^2 \sqrt{3}$. 4. $\frac{4\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$. Т-28-8.
- а) $288\pi \text{ м}^3$, $144\pi \text{ м}^2$; б) $54\pi \text{ м}^2$; в) $108\pi \text{ м}^3$.

- Повыш. сложн. к Т-28. 1. $\frac{4\pi a^3}{3 \cos^3 2\alpha}$, $\frac{4\pi a^2}{\cos^2 2\alpha}$.
3. $\frac{8\sqrt{2} \pi m^3 \sin^3 (\alpha - 45^\circ)}{3}$. 5. $16\pi \text{ м}^2$, $64\pi \text{ м}^2$. 6. $64\pi \text{ м}^2$.
- Т-29. Т-29-1. а) $\frac{4\pi c^2}{\sin^4 \alpha}$; б) $\frac{16c^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}$. Т-29-2. а) $\frac{4}{3} \times$
- $\times \pi a^3 \cos^3 2\alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha$; б) $\frac{2}{3} a^3 \cos 2\alpha \cdot \sin 4\alpha$. Т-29-3. а) $\frac{48\pi}{\sin^2 2\alpha} \text{ м}^2$;
- б) $18 \operatorname{tg} \alpha \text{ м}^3$. Т-29-4. а) $36\pi \operatorname{tg}^3 \beta \text{ м}^3$, $36\pi \operatorname{tg}^2 \beta \text{ м}^2$; б) $\frac{27\sqrt{3}}{\cos 2\beta} \text{ м}^2$.
- Т-29-5. а) $\frac{4\pi a^3}{3 \sin^3 \alpha \sin^3 2\alpha}$; б) $\frac{2a^3}{3 \sin \alpha}$. Т-29-6. а) $4\pi \operatorname{tg}^2 \beta \text{ м}^2$;
- б) $\frac{6}{\cos 2\beta} \text{ м}^2$, $2 \operatorname{tg} 2\beta \text{ м}^3$. Т-29-7. а) $\frac{500}{3} \pi \text{ м}^3$; б) $24\sqrt{3} \text{ м}^3$.
- Т-29-8. а) $100\pi \text{ м}^2$; б) $54\sqrt{3} \text{ м}^3$.

- Повыш. сложн. к Т-29. 1. $\frac{256\pi(11 - 4\sqrt{3})}{219}$. 3. 18 м^2 .
4. $4\pi a^2 \operatorname{tg}^{46} \alpha$. 5. $\frac{4}{3} \pi a^3$. 6. $\frac{4}{3} \pi a^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

- Т-30. Т-30-1. $a = \sqrt{5}$, $S_{\Delta} = 1,5$, $C = 27^\circ$, $B = 108^\circ$,
- $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Т-30-2. $a = 3,2$, $c = 1,4$. $S_{\Delta} = 2,0$, $r = 0,46$.
- Т-30-3. $A = 47^\circ$, $B = 120^\circ$, $C = 13^\circ$, $S_{\Delta} = 35$; $R = 11$;
- $r = 1,8$. Т-30-4. $b = 14$; $A = 38^\circ$; $C = 22^\circ$, $S_{\Delta} = 26$, $R =$
- $= 8,1$, $r = 1,7$. Т-30-5. а) 11; б) 14. Т-30-6. а) $64\pi \approx 200$. б) 19° .
- Т-30-7. $\approx 1000 \text{ м}^3$. Т-30-8. 250.

- Т-31. Т-31-1. а) 6 м; б) 3 м; в) $\frac{2}{3}$ м. Т-31-2. а) 10 м; б) 7 м;

- в) 8 м. Т-31-3. а) 12 см; б) 3 см; в) $\frac{16}{3}$ см. Т-31-4. а) 20,5 см;
 б) 16 см; в) 17 см. Т-31-5. а) $\frac{a}{\sin \alpha}$; б) $\frac{\pi a}{\sin \alpha}$; в) $\frac{a^2}{\sin^2 \alpha \cdot \sin \beta}$.
 Т-31-6. а) 6 м; б) 4π м²; в) 38° . Т-31-7. а) 8 м; б) 6π м; в) да.
 Т-31-8. а) 9 м; б) 4π м²; в) 9,5 м.

Повыш. сложн. к Т-31. 1. $(3 + 2\sqrt{6})$ м. 3. 13 см.
 5. $2\pi(2\sqrt{3} - 3)$ м.

Т-32. Т-32-1. а) $\frac{2\pi a^3}{3 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}$, $\frac{2\pi a^2}{\sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}$;
 б) $\frac{\pi a^2}{16 \sin^2 \alpha}$. Т-32-2. а) $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}^4 \alpha}{3}$, $\frac{\pi a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha}$;
 б) $\frac{\pi a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{25}$. Т-32-3. $\frac{7\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{3}$, $\frac{3\pi a^2}{\cos \alpha}$. Т-32-4. $\frac{7\pi a^3 \sin^3 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{3}$,
 $3\pi a^2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Т-32-5. $\frac{\pi a^3}{3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}$, $\frac{2\pi a^2}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$. Т-32-6.
 $V_{\text{пир}} = 20 \operatorname{tg} \alpha$ м³; $S_{\text{б. пир}} = \frac{30}{\cos \alpha}$ м²; $V_{\text{к}} = \frac{8\pi \operatorname{tg} \alpha}{3}$ м³; $S_{\text{б. к}} =$
 $= \frac{4\pi}{\cos \alpha}$ м². Т-32-7. $V_{\text{пир}} = 3a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$; $V_{\text{к}} = \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{3}$;
 $S_{\text{сеч. пир}} = \frac{16a^2 \sqrt{3}}{27}$. Т-32-8. $V_{\text{пир}} = \frac{a^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4}$; $V_{\text{к}} =$
 $= \frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}$; $S_{\text{сеч. пир}} = \frac{27a^2 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{256}$.

Повыш. сложн. к Т-32. 1. $\frac{3a^3 \sqrt{3} \sin^3 2\alpha}{256 \sin^3 (\alpha + 60^\circ)}$. 2. $\frac{a \sin \alpha \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha}$.
 3. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2} \sin^3 2\alpha}{32 \sin^3 (\alpha + 45^\circ)}$. 4. $\frac{4a \sqrt{3} \sin (\alpha + 60^\circ)}{3 \sin 2\alpha}$.

Самостоятельные работы

- С-1. С-1-1. 2. -4, -3, 0; $a_{13} = 140$. 3. -128.
 4. 9. 5. (-1) . 2^{n-1} . С-1-2. 2. 0, 0, 2; $a_{11} = 90$. 3. $\frac{1}{128}$.
 4. 12. 5. $\frac{1}{2^n}$. С-1-3. 2. -6, -4, 0; $a_{18} = 300$. 3. 486.
 4. 12. 5. $2 \cdot 3^{n-1}$. С-1-4. 2. 6, 2, 0; $a_{14} = 110$. 3. $-\frac{1}{1458}$.
 4. 13. 5. $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
 С-2. С-2-1. 2. 64, нет. 3. Да. 4. 2^{n-1} . С-2-2.

2. 64, нет. 3. Да. 4. $(n+2)^2$. C-2-3. 2. $\frac{1}{128}$, да.
 3. Да. 4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. C-2-4. 2. $\frac{1}{64}$, да. 3. Да. 4. $\left(\frac{1}{n+3}\right)^2$.
 C-3. C-3-1. 1. а) 0; б) 0. 2. 6π м. 3. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ м.

4. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ м². C-3-2. 1. а) 0; б) -1 . 2. 16π м². 3. $2\sqrt{2}$ м.
 4. $2\sqrt{3}$ м². C-3-3. 1. а) 0; б) 0. 2. 8π м. 3. $9\sqrt{3}$ м.
 4. $4\pi^2$. C-3-4. 1. а) 0; б) -1 . 2. 4π м². 3. 50 м². 4. $\sqrt{3}$ м².

C-4. C-4-1. 1. а) 4π м; б) 2 м; в) $\frac{8\pi}{3}$ м². 2. $0,8$ м.

C-4-2. 1. а) 25π м²; б) $5\sqrt{2}$ м; в) $\frac{3\pi}{4}$ м. 2. 12 м. C-4-3.
 1. а) 10π м; б) 30 м; в) π м². 2. $0,6$ м. C-4-4. 1. а) 9π м²;
 б) $3\sqrt{3}$ м; в) $\frac{3\pi}{5}$ м. 2. $4,5$ м.

C-5. C-5-1. а) 112° , $a=36$ м, $c=30$ м; б) $h_c=11$ м.
 C-5-2. а) $A=109^\circ$, $b=9,3$ м, $c=12$ м; б) $h_b=11$ м. C-5-3.
 а) $A=109^\circ$, $a=56$ м, $b=36$ м; б) $h_c=34$ м. C-5-4. а) $C=111^\circ$,
 $a=47$ м, $b=32$ м; б) $h_a=30$ м.

C-6. C-6-1. 1. а) $a=23$ м; б) $B=128^\circ$, $C=15^\circ$. C-6-2.
 а) $A=26^\circ$; б) $C=118^\circ$. C-6-3. а) $b=27$ м; б) $A=77^\circ$,
 $C=1^\circ$. C-6-4. а) $B=31^\circ$; б) $A=125^\circ$.

C-7. C-7-1. 1. $\frac{a \sin \beta \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$. 2. $\frac{a \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

C-7-2. 1. $\frac{h \sin(\varphi - \gamma)}{\sin \varphi \cdot \sin \gamma}$. 2. $h \cos \gamma$. C-7-3. 1. $\frac{b \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

2. $\frac{b \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. C-7-4. 1. $\frac{a \sin \gamma}{\sin \varphi \cdot \sin(\varphi - \gamma)}$.
 2. $a \cos(\varphi - \gamma)$.

C-10. C-10-1. 3. 90° . 4. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ м. C-10-2. 3. 60° .
 4. $(4,5\sqrt{2} + 3\sqrt{5})$ м. C-10-3. 3. 45° . 4. $(6\sqrt{2} + 4\sqrt{5})$ м.
 C-10-4. 3. 60° . 4. $(1,5\sqrt{2} + \sqrt{5})$ м.

C-11. C-11-1. а) 3 м; б) 3 м. C-11-2. 2. а) $5,5$ м; б) 7 м. C-11-3.
 а) 4 м; б) 4 м. C-11-4. а) 6 м; б) 9 м. C-12. C-12-1. 1. а) 3 м;
 б) 8 м, 3 м. C-12-2. 1. а) $\sqrt{34}$ м; б) 4 м, 5 м. C-12-3. 1. а) 6 м;
 б) 6 м, 10 м. C-12-4. 1. а) $5\sqrt{6}$ м; б) 12 м, 15 м.

C-13. C-13-1. в) $4 \operatorname{tg} \alpha$. C-13-2. в) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$. C-13-3. в) $\frac{3}{\cos \alpha}$.

C-13-4. в) $a \cos \alpha$.

C-14. C-14-1. а) $2\sqrt{3}$ м; б) 60° . C-14-2. а) 4 м; б) 12 м.
 C-14-3. а) 4 м; б) 60° . C-14-4. а) 5 м; б) $7,5$ м. C-15. C-15-1.
 а) $1,2$ м; б) $0,4$ м. C-15-2. а) 3 м; б) $1,2$ м. C-15-3. а) 4 м;

б) $2\frac{2}{3}$ м. С-15-4. а) 2 м; б) 0,4 м.

С-16. С-16-1. 1. а) да; б) нет. 2. а) 45° ; б) 2 м. С-16-2. 1. а) нет; б) да. 2. а) 30° ; б) $3\sqrt{2}$ м. С-16-3. 1. а) нет; б) нет. 2. а) 45° ; б) 8 м. С-16-4. 1. а) да; б) да. 2. а) 30° ; б) 2 м.

С-17. С-17-1. а) 50 м; б) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ м. С-17-2. а) 14 м;

б) $\frac{60\sqrt{3}}{13}$ м. С-17-3. а) 14 м; б) $\frac{28\sqrt{3}}{13}$ м. С-17-4.

а) 50 м; б) $\frac{24\sqrt{3}}{7}$ м.

С-18. С-18-1. а) 9 м²; б) 12 м. С-18-2. а) 49 м²; б) 28 м. С-18-3. а) 4 м²; б) 8 м. С-18-4. а) 196 м²; б) 56 м.

С-19. С-19-1. а) 288 м²; б) $\frac{\sqrt{3076}}{5} \approx 11$ м. С-19-2.

а) 208 м²; б) $4\sqrt{5}$ м. С-19-3. а) 300 м²; б) $4\sqrt{13}$ м. С-19-4.

а) $84\sqrt{3}$ м²; б) $\frac{\sqrt{1203}}{2}$ м.

С-20. С-20-1. а) 504 м²; б) $7\frac{1}{17}$ м. С-20-2. а) $4\sqrt{2}$ м²;

б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ м. С-20-3. а) 2016 м²; б) 9,6 м. С-20-4. а) $9\sqrt{2}$ м²;

б) $3\sqrt{2} \sin 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 37,5^\circ$ м.

С-21. С-21-1. а) 48 см³. С-21-2. а) 8 см³. С-21-3. а) $9\sqrt{2}$ м³. С-21-4. а) $6\sqrt{3}$ м³.

С-22. С-22-1. а) $2\frac{2}{3}$ м³. С-22-2. а) 65 см³. С-22-3. а) $9\sqrt{3}$ см³.

С-22-4. а) 12 м³.

С-23. С-23-1. а) $\sqrt{3}$ м³; б) $\frac{2}{3}$ м. С-23-2. а) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ м³.

С-23-3. а) $2\sqrt{6}$ м³; б) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ м. С-23-4. а) $8\sqrt{6}$ м³.

С-24. С-24-1. а) 2 м; б) $2\sqrt{2}$ м. С-24-2. а) 2 м; б) 1 м. С-24-3. а) 4 м; б) $2\sqrt{2}$ м. С-24-4. а) 8 м; б) $2\sqrt{2}$ м.

С-25. С-25-1. а) 24π м³; б) 48 м³. С-25-2.

а) $2\pi c^2 \sin 2\beta$; б) $\frac{3\sqrt{3}c^3 \sin 2\beta \cos \beta}{4}$. С-25-3. а) 96π м³;

б) 96 м³. С-25-4. а) $2\pi k^2 \sin 2\alpha$; б) $\frac{3}{2}k^3\sqrt{3} \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha$.

С-26. С-26-1. а) $\frac{4}{3}\pi a^3 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha$, $4\pi a^2 \sin \alpha$; б) $\frac{a}{\cos \alpha}$.

C-26-2. а) $\frac{1}{3} \pi a^3 \operatorname{ctg}^2 2\beta$, $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg} 2\beta}{\sin 2\beta}$; б) $a \operatorname{ctg} 2\beta \cdot \operatorname{tg} \beta$. C-26-3.

а) $\frac{1}{3} \pi a^3 \operatorname{ctg} \beta$, $\frac{\pi a^2}{\sin \beta}$; б) $\frac{a}{\sin 2\beta}$; C-26-4. а) $\frac{4}{3} \pi b^3 \cos 2\alpha \times$

$\times \sin 4\alpha$, $4\pi b^2 \cos 2\alpha$; б) $2b \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

C-27. C-27-1. 1. $16\pi \text{ м}^2$; 2. 9 м. C-27-2. 1. 10 м. 2. 5 м.
C-27-3. 1. $36\pi \text{ см}^2$; 2. 7 см. C-27-4. 1. 13 см. 2. 3 см.

C-28. C-28-1. а) $16\pi \text{ см}^2$, $\frac{256\pi}{3} \text{ см}^3$; б) 60° . C-28-2.

а) $\frac{4\pi a^3}{3 \sin^2 \alpha}$, $\frac{4\pi a^2}{\sin^2 \alpha}$; б) $90^\circ + \alpha$. C-28-3. а) $4\pi \text{ см}^2$, $\frac{32\pi}{3} \text{ см}^3$;

б) 60° . C-28-4. а) $2a$, $\frac{16\pi a^3 \sin \beta}{3}$; б) 2β .

C-29. C-29-1. а) $\frac{4\pi a^3}{3 \cos^3 \alpha}$; б) $4a^3 \sin^2 \alpha$, C-29-2. а) $4\pi a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$;

б) $2a \sin 2\alpha$. C-29-3. а) $\frac{4\pi a^3}{3 \sin^3 \alpha}$; б) $4a^3 \cos \alpha$. C-29-4. а) $4\pi a^2 \operatorname{tg}^2 \beta$;

б) $3a \sin 2\beta$.

C-30. C-30-1. а) 7 м, $12\sqrt{3} \text{ м}^2$; б) $\angle ADB \approx 22^\circ$,
 $\angle ABD \approx 98^\circ$. C-30-2. а) 7 м, $\frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ м}^2$; б) $A \approx 38^\circ$, $C \approx 22^\circ$.

C-30-3. а) 7 м; $10\sqrt{3} \text{ м}^2$; б) $B \approx 82^\circ$, $C \approx 38^\circ$. C-30-4.
а) 19 м, $40\sqrt{3} \text{ м}^2$; б) $\angle CAD \approx 13^\circ$, $\angle ACD \approx 47^\circ$.

C-31. C-31-1. а) 5 см; б) 3,5 см; в) 0,5 см. C-31-2. а) 3 м;
б) 6 м; в) 1 м. C-31-3. а) 13 м; б) 8,5 м; в) 0,5 м. C-31-4. а) 5 м;
б) 10 м; в) 2 м.

C-32. C-32-1. а) 3 м; б) $\frac{52}{3} \text{ м}^3$. C-32-2. а) 4 м; б) $28\pi \text{ м}^3$.

C-32-3. а) 4 м; б) $63\sqrt{3} \text{ м}^3$. C-32-4. а) 12 м; б) $172\pi \text{ м}^3$.

Контрольные работы

K-1. K-1-1. 2. а) 2, $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{13}{8}$; $a_8 = \frac{25}{16}$; б) мо-

нотонно убывающая; в) да, $\frac{3}{2}$. 3. а) $-\frac{2}{3}$; б) 2,5. 4. а) $a_7 = \frac{4}{7}$,

$a_n = \frac{n+1}{2n}$; б) нет. 5. Нет. K-1-2. 2. а) -3 , -2 , $-\frac{9}{5}$,

$-\frac{12}{7}$; $a_7 = -\frac{21}{13}$; б) возрастающая; в) $-\frac{3}{2}$.

3. а) $-\frac{1}{3}$; б) 2. 4. а) $a_6 = \frac{13}{7}$; $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$; б) $n = 999$.

5. Нет. K-1-3. 2. а) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{16}$; $a_6 = \frac{13}{24}$;

- б) убывающая; в) $\frac{1}{2}$. 3. а) -1 ; б) $2,5$. 4. а) $\frac{9}{4}$, $a_n = \frac{3n}{n+2}$; б) нет. 5. Нет. К-1-4. 2. а) $-4, -2, -1$ $\frac{5}{7}$, -1 $\frac{3}{5}$; $a_7 = -1$ $\frac{9}{19}$; б) монотонно возрастающая; в) $-\frac{4}{3}$. 3. а) $\frac{1}{3}$; б) -3 . 4. а) $a_6 = \frac{9}{15}$, $a_n = \frac{n+3}{2n+3}$; б) $n = 11$. 5. Нет.

- К-2. К-2-1. 1. а) 25π м²; б) $\frac{15\pi}{4}$ м; в) $5\sqrt{3}$ м; г) $\frac{25\pi}{9}$ м²; д) 50 м². 2. 2,4 м. К-2-2. 1. а) 18π м; б) $\frac{15\pi}{2}$ м; в) $9\sqrt{2}$ м; г) $\frac{45\pi}{4}$ м²; д) $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ м². 2. 10 м. К-2-3. 1. а) 36π м²; б) $\frac{15\pi}{2}$ м; в) $6\sqrt{3}$ м; г) $\frac{7\pi}{10}$ м²; д) $54\sqrt{3}$ м². 2. 4,5 м. К-2-4. 1. а) 20π м; б) $\frac{35\pi}{3}$ м; в) $10\sqrt{2}$ м; г) $\frac{200\pi}{9}$ м²; д) 100 м². 2. 1,4 м.

- К-3. К-3-1. 1. $A = 57^\circ$, $B = 44^\circ$, $C = 79^\circ$. 2. $B = 67^\circ$. 3. ≈ 17 м. К-3-2. 1. $a \approx 2,6$ м. $B \approx 94^\circ$, $C \approx 54^\circ$. 2. $A = 105^\circ$. 3. ≈ 22 м. К-3-3. 1. $A = 48^\circ$, $B = 58^\circ$, $C = 74^\circ$. 2. $B = 29^\circ$. 3. ≈ 22 м. К-3-4. 1. $c \approx 4$ м, $A = 55^\circ$, $B = 84^\circ$. 2. $C = 101^\circ$. 3. ≈ 34 см.

- К-4. К-4-1. 2. а) 2 м, $AC = 2\sqrt{2}$ м; б) $2\sqrt{2}$ м; в) $\cos \angle BOC = \frac{\sqrt{3}}{3}$. К-4-2. 2. а) 2 м, $CB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ м; в) $\cos \angle DCB = \frac{3\sqrt{6}}{8}$. К-4-3. 2. а) 3 м, $KC = 6$ м; б) $\sqrt{21}$ м; в) $\cos \angle BKC = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ м. К-4-4. 2. а) $4\sqrt{3}$ м; б) 4 м; в) 0° .

- К-5. К-5-1. в) 45° . К-5-2. б) $2a(2 + \sqrt{2})$; в) 45° . К-5-3. в) 90° . К-5-4. б) $4b(2 + \sqrt{2})$; в) 45° .

- К-6. К-6-1. 1. а) 6 м; б) 2,4 м. К-6-2. 1. а) 9 м; б) $6\frac{1}{3}$ м. 2. в) $1,5$ м². К-6-3. 1. а) 42 м; б) $8\frac{6}{7}$ м. 2. в) 3 м². К-6-4. 1. а) 2:3; б) $3\frac{1}{3}$ м. 2. в) 6 м².

- К-7. К-7-1. а) 8 м; б) 60° ; г) $2\sqrt{3}$ м. К-7-2. а) 13 м; б) $\tan \angle ABK = \frac{12}{5}$; г) $4\frac{8}{13}$ м. К-7-3. а) $2\sqrt{3}$ м; б) 60° ; г) 1,5 м.

$$\text{K-7-4. a) } 41 \text{ м; б) } \sin \angle BPC = \frac{9}{41}; \text{ г) } \frac{360}{41} \text{ м.}$$

$$\text{K-8. K-8-1. б) } \frac{a^2 \operatorname{ctg} 2\alpha}{2 \sin \alpha}. \text{ K-8-2. б) } a, \frac{a}{\sin \alpha}, \frac{a}{\sin 4\alpha};$$

$$\text{в) } \frac{a^2 \operatorname{ctg} 4\alpha}{\sin \alpha}. \text{ K-8-3. б) } a, \frac{a}{\sin \alpha}, \frac{a}{\sin 3\alpha}; \text{ в) } \frac{a^2 \operatorname{ctg} 3\alpha}{2 \sin \alpha}. \text{ K-8-4.}$$

$$\text{б) } \frac{a}{\sin 5\alpha}, \text{ в) } \frac{a^2 \operatorname{ctg} 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\text{K-9. K-9-1. 1. } 4,32 \text{ м}^2. \text{ 2. а) } 14 \text{ м; б) } \frac{105 \sqrt{3}}{26} \text{ м. K-9-2. 1. } 98 \text{ м}^2.$$

$$\text{2. а) } 25 \text{ м; б) } \frac{15 \sqrt{3}}{14} \text{ м. K-9-3. 1. } 4,5 \text{ м}^2. \text{ 2. а) } 25 \text{ м; б) } \frac{12 \sqrt{3}}{7} \text{ м.}$$

$$\text{K-9-4. 1. } 18 \text{ м}^2. \text{ 2. а) } 20 \text{ м; б) } \frac{40 \sqrt{3}}{19} \text{ м}$$

$$\text{K-10. K-10-1. а) } 260 \text{ м}^2; \text{ г) } 9 \frac{3}{13} \text{ м. K-10-2. а) } 6 \sqrt{3} \text{ м}^2;$$

$$\text{г) } \frac{3 \sqrt{21}}{7} \text{ м. K-10-3. а) } 700 \text{ м}^2; \text{ г) } 13,44 \text{ м. K-10-4. а) } \frac{9 \sqrt{3}}{2} \text{ м}^2;$$

$$\text{г) } \frac{3 \sqrt{39}}{26} \text{ м.}$$

$$\text{K-11. K-11-1. 1. } 4 \sqrt{3} \text{ м}^3. \text{ 2. б) } a^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha. \text{ K-11-2. 1. } 16 \text{ см}^3.$$

$$\text{2. } \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} \text{ K-11-3. 1. } \frac{27 \sqrt{3}}{4} \text{ м}^3. \text{ 2. } \frac{a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3} \text{ K-11-4. 1. } \frac{32}{3} \text{ м}^3.$$

$$\text{2. б) } \frac{b^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{8 \cos \alpha}; \text{ в) } \frac{b^2}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{K-12. K-12-1. а) } \frac{2\pi a^2 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{3}, \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{3}; \text{ б) } 90^\circ - \alpha; \text{ в) } 30^\circ.$$

$$\text{K-12-2. а) } \frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2}, \frac{\pi a^3 \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}{8}; \text{ б) } 90^\circ - \alpha; \text{ в) } 45^\circ \text{ K-12-3.}$$

$$\text{а) } \pi m^2 \sin 2\alpha, \pi m^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha; \text{ б) } 2\alpha; \text{ в) } 30^\circ. \text{ K-12-4. а) } \frac{\pi a^2}{\cos \alpha},$$

$$\frac{\pi a^3}{2 \sin 2\alpha}; \text{ б) } 90^\circ; \text{ в) } 60^\circ.$$

$$\text{K-13. K-13-1. а) } \frac{\pi h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}; \text{ б) } \frac{\pi h^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}; \text{ в) } 360^\circ \cdot \cos \alpha; \text{ г) } 0,5.$$

$$\text{K-13-2. а. } \frac{\pi a^3 \cos \beta \cdot \sin 2\beta}{6}; \text{ б) } \pi a^2 \cos \beta, \text{ в) } 360^\circ \cdot \cos \beta; \text{ г) } 0,5.$$

$$\text{K-13-3. а) } \frac{\pi a^2}{\cos \alpha}; \text{ б) } \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{3}; \text{ в) } 360^\circ \cdot \cos \alpha; \text{ г) } 1:1. \text{ K-13-4.}$$

$$\text{а) } \pi c^2 \sin \beta; \text{ б) } \frac{\pi c^3 \sin 2\beta \cdot \sin \beta}{6}; \text{ в) } 360^\circ \cdot \sin \beta; \text{ г) } 1:1.$$

- К-14. К-14-1. а) 16π кв. ед.; $\frac{32}{3}\pi$ куб. ед.; б) 4π кв. ед.;
 в) $\frac{8}{3}\pi$; г) $\frac{8}{3}$. К-14-2. а) 100π кв. ед., $\frac{500}{3}\pi$ куб. ед.; б) 20π ;
 в) $\frac{400}{3}\pi$; г) $5\sqrt{6}$. К-14-3. а) 16π кв. ед., $\frac{32}{3}\pi$ куб. ед.; б) 12π ;
 в) 8π ; г) $2\sqrt{2}$. К-14-4. а) 16π кв. ед., $\frac{32}{3}\pi$; б) 4π ; в) 16π ; г) 20 .

- К-15. К-15-1. 1. $\frac{4}{3}\pi a^3 \cos^3 2\alpha \operatorname{tg}^3 \alpha$. 2. $A=60^\circ$, $C=22^\circ$. К-15-2.
 1. $\frac{4\pi a^2}{\cos^2 \alpha}$. 2. $b=7$ м, $A=22^\circ$. К-15-3. 1. $\frac{4}{3}\pi a^3 \operatorname{ctg}^3 2\alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha$.
 2. $a=4,4$ м, $c=5,4$ м. К-15-4. 1. $\frac{4\pi b^2}{\cos^2 \beta}$. 2. $b=5,5$ м, $C=50^\circ$.

- К-16. К-16-1. а) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; б) $0,64$. К-16-2. а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
 К-16-3. а) $\frac{32\pi\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$. К-16-4. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{5\sqrt{6}+4}{3}$.

Задачи к экзаменационным билетам

- К билету 1. 1. а) $\frac{2a}{\cos \alpha}$; б) $\frac{2a}{\sin 2\alpha}$; 2. а) $\frac{2a}{\cos \alpha}$; б) $\frac{2a}{\sin 2\alpha}$.
 3. а) $4a$; б) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. 4. а) $4a$; б) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. К билету 3. 1. а) $\frac{a}{\cos 2\alpha}$;
 б) $a \operatorname{tg} \alpha$. 2. а) $\frac{3a}{\cos 2\alpha}$; б) $3a \operatorname{tg} \alpha$. 3. а) $2a$; б) $a\sqrt{3}$. 4. а) $6a$;
 б) $a\sqrt{3}$. К билету 4. 1. а) $3a \operatorname{tg} \alpha$. 2. а) $2a \operatorname{ctg} \alpha$. 3. а) $3a\sqrt{3}$.
 4. а) $2a\sqrt{3}$. К билету 6. 1. а) $2a \sin^2 \alpha$; б) $0,25$. 2. а) $2a \sin^2 \alpha$; б) $\frac{4}{3}$.
 3. а) $0,5a$; б) $0,25$. 4. а) $1,5a$; б) $\frac{4}{3}$. К билету 7. 1. а) $a \operatorname{tg} \alpha$;
 б) $\frac{a^2}{2 \cos \alpha}$. 2. а) $a^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$; б) $\frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin 2\alpha}$. 3. а) a ; б) $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$;
 4. а) a^2 ; б) $\frac{a^2}{3}$. К билету 8. 1. а) $\frac{2b^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$; б) $1 : \cos \alpha$.
 2. а) $\frac{8a^2}{\sin 2\alpha}$; б) $a \sin \alpha$. 3. а) $\frac{4}{3}b^2$; б) $2\sqrt{3}$. 4. а) $8a^2$;
 б) $0,5a\sqrt{2}$. К билету 9. 1. а) $2 \operatorname{tg} \alpha$ м; б) $4 \sin \alpha$ м. 2. а) $\frac{4}{3}a^3 \times$
 $\times \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$; б) $2a \sin^2 \alpha$. 3. а) $2\sqrt{3}$ м; б) $2\sqrt{3}$ м. 4. а) $\frac{2a^3}{3}$;

б) а. К билету 10. 1. а) $\frac{4\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}$; б) $\frac{26a^3\pi}{9}$. 2. а) $4\pi a^2$; б) $\frac{13\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.
3. а) $\frac{16\pi a^2}{3}$; б) $\frac{26\pi a^3}{9}$; 4. а) $4\pi a^2$; б) $\frac{13\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

К билету 11. 1. а) $\frac{4}{3}\pi a^3 \operatorname{tg}^3 \alpha$; б) $4\pi a^2 \sin^2 \alpha$. 2. а) $\frac{\pi b^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$; б) $4\pi b^2 \sin^2 \alpha$. 3. а) $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$; б) πa^2 . 4. а) $6\pi b^2$; б) πb^2 . К биле-

ту 12. 1. а) $\frac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg} \alpha}{4}$; б) $\frac{a^3(4\pi\sqrt{3}-9)}{36}$. 2. а) $\frac{2a^3 \operatorname{tg} \alpha}{3}$;

б) $\frac{a^3(\pi-2)}{3}$. 3. а) $0,75 a^3$; б) $\frac{a^3(4\pi\sqrt{3}-9)}{36}$. 4. а) $\frac{2}{3} a^3$;

б) $\frac{a^3(\pi-2)}{3}$. К билету 13. 1. а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{cosec} \alpha)$.

2. а) $x=\operatorname{arctg}(\operatorname{cosec} \alpha)$. 3. а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. 4. а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

К билету 14. 1. а) $\frac{4000\pi}{3\sin^3 2\alpha}$ м³. 2. а) $\frac{16\pi}{\sin^2 2\alpha}$. 3. а) $\frac{32000\pi\sqrt{3}}{27}$ м³.

4. а) $\frac{64\pi}{3}$. К билету 15. 1. а) $\pi a^2 \sin \alpha$; б) $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{3}$.

2. а) $\pi b^2 \sin \alpha$; б) $\frac{\pi b^3 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{3 \sin 3\alpha}$. 3. а) $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\pi a^3}{2}$.

4. а) $\frac{\pi b^2 \sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\pi b^3 \sqrt{2}}{4}$. К билету 16. 1. б) $a^2 \sqrt{3} \cos \alpha$.

2. б) $a^2 \sqrt{3} \cos \alpha$. 3. б) $1,5 a^2$. 4. б) $1,5 a^2$. К билету 17. 1. а) $4\pi a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$;
б) $1:\cos 2\alpha$. 2. а) $4\pi a^2 \cos^2 2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$; б) $1:\cos 2\alpha$. 3. а) $12\pi a^2$; б) $2:1$.

4. а) $2\pi a^2$; б) $\sqrt{2}:1$. К билету 18. 1. б) $\frac{2a \sin \alpha}{2+\operatorname{tg} \alpha}$. 2. б) $\frac{2a \sin \alpha}{2+\operatorname{tg} \alpha}$.

3. б) $a(2\sqrt{3}-3)$. 4. б) $a(2\sqrt{3}-3)$. К билету 19.

1. б) $\frac{a\sqrt{3}\sin 2\alpha}{4\sin(\alpha+60^\circ)}$. 2. б) $\frac{a\sqrt{2}\sin \alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg} \alpha}$. 3. б) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

4. б) $a(\sqrt{2}-1)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Примечания	7
Несложные задачи для отработки навыка	14
Тренировочные работы	23
Самостоятельные работы	94
Контрольные работы	122
Задачи к экзаменационным билетам	139
Ответы	149

**Лидия Алексеевна Сомова,
Александр Николаевич Чудовский**
УПРАЖНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ
(дидактический материал)

Редактор И. Ф. Гуревич
Художник С. В. Митурич
Художественный редактор В. П. Бабинова
Технический редактор Н. А. Битюкова
Корректор З. Г. Карабанова

Сдано в набор 7/III 1974 г. Подп. к печати 2/IX 1974 г. Формат 84×108¹/₁₆. Бум. типогр. № 3. Объем 5,25 печ. л. 8,82 усл. п. л. Уч.-изд. л. 8,44 Изд. № ППМ-1258. Тираж 50 000 экз. Цена 19 коп. Зак. 172.

Москва, К-51. Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1974 г. Позиция № 5

Ярославский полиграфкомбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ярославль, ул. Свободы, 97.

19 коп.

«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА

ПРОФТЕХОБРАЗОВАНИЕ



ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Л.А.СОМОВА
А.Н.ЧУДОВСКИЙ

**упражнения
по
геометрии**